Datos Generales
Nombre de la asignatura: Introducción al Cálculo *Período de elaboración: abril a junio de 1995* *Semestre: sexto* *Carga horaria semestral: 51 horas* *Carga horaria semanal: 3 horas* *Distribución horaria semanal: Una sesión de 2 horas y una de 1 hora*

PRESENTACION

Introducción al cálculo es uno de los cursos de carácter optativo del nuevo Plan de Estudios del Bachillerato General de la Universidad de Guadalajara (1992), estos cursos "... flexibilizan los dos últimos semestres del Plan de Estudios y permiten al alumno profundizar en el estudio de ciertas reas del conocimiento en que se organiza el nivel de licenciatura en nuestra Universidad y que son:

a) Ciencias Sociales y Humanidades,
b) Ciencias Económico-Administrativas,
c) Ciencias Exactas e Ingenierías,
d) Ciencias de la Salud, y,
e) Ciencias Biológicas, Agropecuarias y Ecológicas "

A partir de esta división de las reas del conocimiento, el curso fue ubicado en la de Ciencias Exactas e Ingenierías; dicha ubicación es correcta en cuanto al objetivo de profundizar los conocimientos adquiridos en Matemáticas, a través de su aplicación a la solución de problemas de la Física y la Química, pero resulta limitante si consideramos que el Cálculo es una herramienta importante que permite plantear modelos que resuelven numerosos problemas en las otras reas.

JUSTIFICACION

Los conceptos del Cálculo constituyen una parte importante de la cultura matemática básica del alumno, ya que esta teoría sintetiza y amplía las teorías Matemáticas desarrolladas con anterioridad y representa un avance significativo en las habilidades relacionadas con el pensamiento matemático. Prácticamente todo desarrollo en las ciencias y en particular en Matemáticas, de 1600 a la fecha, ha estado relacionado con el Cálculo y ha estimulado la aparición de nuevas e interesantes ramas de la matemática.

OBJETIVOS DEL CURSO

Presentar al estudiante los conceptos elementales del Cálculo diferencial e integral de manera que:

a) Integre los conocimientos adquiridos en las asignaturas de Matemáticas precedentes, en la solución de problemas que involucren movimiento o razones de cambio en general.

b) Construya a un nivel intuitivo los conceptos elementales del Cálculo como variación, aproximación, procesos infinitos, límite, discreto, continuo, derivada e integral.

Por "construir a un nivel intuitivo" entendemos:

c) Comprenda y vea claramente lo que establece un resultado, no es suficiente memorizar ciertas palabras.

d) Pueda reunir evidencias que muestren que ese resultado es razonable; deben sentir que el resultado coincide con su experiencia en las Matemáticas.

e) Debe saber lo que puede hacer con el resultado, puede tener aplicaciones en la ciencia o simplemente conducir a otros interesantes resultados de la matemática. Debe conocer cuáles son éstos.

ORIENTACION GENERAL PARA EL DESARROLLO DEL CURSO

El programa no debe concebirse como una sucesión de temas que deban agotarse uno a continuación del otro, lo cual tendría como principales obstáculos el tiempo asignado y la extensión de los temas fundamentales. En una presentación formal tienen el siguiente orden:

- Conjuntos
- Funciones
- Números reales
- Límites
- Continuidad
- Derivación y sus aplicaciones (problemas geométricos y físicos, máximos y mínimos)
- Integración y sus aplicaciones (reas y volúmenes, momento, trabajo, etc)

Se propone que se procure integrar en cada actividad contenidos de los diferentes temas, de modo que el alumno pueda alcanzar los objetivos del curso y tener un panorama amplio del Cálculo.

La profundidad con que se aborden cada uno de los temas enlistados, depender del problema donde sea necesario usarlos, as¡ como de los antecedentes con que lleguen los alumnos. El orden histórico en que aparecieron esos temas, es un elemento a considerar para la planificación de las actividades.

Las propuestas usuales para la enseñanza del Cálculo que encontramos en los programas del bachillerato siguen una organización formal, en las que se parte de los conceptos más simples desde el punto de vista lógico y se va desarrollando paso a paso los demás, hasta llegar a los conceptos fundamentales de derivada e integral, para finalizar con las aplicaciones de éstos. Este es el desarrollo lógico, coherente y ordenado del cálculo, donde cada nuevo concepto se define o construye con precisión en base a los anteriores (a excepción de los conceptos más elementales, como el de conjunto) y todas las proposiciones se demuestran en forma rigurosa. Una forma diferente es la histórica, que presenta los conceptos en la forma y medio en que fueron apareciendo. Los conceptos del cálculo no aparecieron repentinamente en la cabeza de los que lo inventaron, en forma clara y definida, sino que se fueron gestando poco a poco y sufriendo considerables modificaciones en su desarrollo partiendo de ideas vagas e intuitivas hasta llegar a la forma rigurosa y precisa que hoy conocemos. El origen de estos conceptos y sus sucesivas transformaciones se basa tanto en las necesidades surgidas de la actividad práctica y científica de los hombres, como de las de precisión y generalización que surgen del desarrollo propio de la teoría.

La aparición de los temas en el orden histórico es, en forma esquemática, el siguiente:

- Problemas geométricos y físicos (reas y volúmenes, tangentes, velocidad, máximos y mínimos, etc)
- Funciones
- Derivación e Integración
- Límites y Continuidad
- Números Reales y Conjuntos,

y cada uno de los temas va ligado con sus aplicaciones y con el desarrollo de todos los anteriores, así como de algunos nuevos y más avanzados. En términos generales el orden es el opuesto al de la presentación formal.

Estas dos formas no se contraponen sino que deben complementarse de tal manera que el alumno conozca el desarrollo de los conceptos, pues los problemas que deberán enfrentar en lo general no están dados en forma de definiciones y axiomas, sobre los cuales aplicar sus capacidades deductivas; por el contrario deber manejar intuiciones, analogías y conceptos más o menos vagos e imprecisos y llegar a través de ellos a resultados prácticos e hipótesis de trabajo o a la formulación rigurosa de dichos conceptos. Para lograr lo anterior, tarea nada fácil para el profesor, sugerimos retomar las recomendaciones didácticas formuladas en los programas de Matemáticas precedentes, donde la solución de problemas es la actividad central. Para concretar esta propuesta en el aula, se proponen una serie de problemas, en cada núcleo temático, donde se intenta integrar diferentes contenidos, de modo que el alumno pueda percibir las relaciones existente entre ellos. En ese contexto la técnica de taller propicia el desarrollo de la solución de problemas en equipo.

La solución de problemas en el salón de clases es una actividad que requiere tiempo para realizarse, si éste se acorta indebidamente, la actividad pierde sentido o se dejan de satisfacer los objetivos buscados. Por ello, es importante que se considere el tiempo suficiente para que la actividad se complete. Este aspecto es básico en la petición de la distribución horaria del curso en sesiones de dos horas.

El uso de la calculadora y la computadora es una propuesta que deber estar presente cuando planifiquemos las actividades, pues ser de gran utilidad para revalorizar lo discreto, ya que como explica el Dr. Simón Mochón en su libro "Quiero entender el Cálculo".

"El Cálculo no nació con la idea formal del límite, sino con técnicas mas intuitivas basadas en enfoques empíricos. En sus inicios, el Cálculo se desarrolló alrededor de lo que podríamos llamar un cálculo "discreto", basado en diferencias. El paso a lo continuo se hizo poco a poco, por medio de elementos algo ideales que representaban porciones infinitamente pequeñas y a las cuales se les denominó infinitísimos.

Estas ideas fueron las que forjaron la intuición de grandes físicos y matemáticos, quienes emplearon y engrandecieron los conocimientos que se conocen hoy en día como cálculo diferencial e integral. "Por qué no dejar que estas mismas ideas sirvan también a nuestros estudiantes para generar su concepción de las partes centrales del Cálculo? "

ELEMENTOS PARA LA EVALUACION

Sabemos que la propuesta de trabajo en equipos alrededor de la solución de problemas complica la evaluación, sobre todo si ésta se basaba solo en la aplicación de exámenes escritos individuales para cumplir con los criterios de acreditación en esta institución; "los requisitos mínimos sin los cuales el alumno no aprueba la materia son 80 % de asistencias y calificación mínima de 60 en la escala de 100".

No proponemos eliminar los exámenes escritos, sino combinarlos con otros instrumentos que permitan evaluar el desarrollo del estudiante, que en el marco de un taller pueden ser:

- Reporte escrito, individual o en equipo, de los resultados obtenidos en cada actividad.

- Exposición oral donde defiendan sus resultados y los confronten con los de otros equipos, tendiendo hacia el debate científico. Como resultados no solo entendemos el haber llegado a una solución, sino también los avances hacia ella .

- Elaboración de problemarios a partir de las actividades.

Finalmente, los criterios para calificar deben ser decididos por cada profesor a partir de los acuerdos logrados en las reuniones del departamento de ciencias exactas.

NUCLEO TEMATICO I
PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS

Presentación

Las funciones son la representación de los fenómenos que queremos modelar, con ellas podemos conocer las situaciones mas convenientes o prever lo que suceder en un momento dado, tenemos entonces que conseguir formular las funciones y una vez formuladas saber cómo estudiarlas. En particular el tema de máximos y mínimos aparece al final del tema de derivada, se plantea desde el inicio porque los problemas que usualmente se manejan pueden resolverse con la herramienta desarrollada en los cursos anteriores, partiendo de un análisis geométrico.

Objetivos

Resolver problemas de máximos y mínimos desde una perspectiva gráfica y numérica, es decir, que el alumno pueda:

- graficar funciones
- interpretar una gráfica
- determinar el punto máximo o mínimo de una gráfica
- interpretar los resultados en el contexto del problema

Contenidos

Funciones polinomiales
Operaciones con funciones
Funciones racionales

Problemas:

1.- Dividir al 30 en dos sumandos, tales que su producto sea máximo.

2.- Demostrar que: La suma de dos números, cuyo producto es constante, alcanza el valor mínimo cuando dichos números son iguales

3.- De un material disponible puede construirse una cerca de 200 metros de largo. Con esta cerca se quiere rodear un terreno rectangular con la mayor área posible usando la pared de una fábrica como uno de los lados del terreno. Hallar las dimensión es del terreno rectangular.

4.- ¿Qué forma ha de tener una parcela rectangular de un area dada, para que la longitud de su cerca sea la menor posible?

¿Qué forma debe tener una parcela rectangular para que, con una longitud fija de su cercado, tenga aquí la mayor área posible?

5.- En un círculo dado debe inscribirse un rectángulo de área máxima. Hallar las dimensiones del rectángulo.

6.- De un tronco cilíndrico debe sacarse una viga rectangular del máximo volumen. ¿Qué forma ha de tener su sección?

7.- Una recta variable que pasa por el punto (1,2) corta al eje x en A(a,0) y al eje y en B(0,b). H llegue el rea de triángulo AOB de menor rea si a y b son ambos positivos.

Bibliografía:

Bromberg, Shirley, Polinomios y sus gráficas, México, LIMUSA, 1992.
PonceJ, Rosa Elena, "Máximos y mínimos" en Antología para el Taller de Estrategias para la Solución de Problemas, Guadalajara, SEMS U de G, febrero de 1995.

NUCLEO TEMATICO 2:
PROBLEMAS CON SUCESIONES Y SERIES INFINITAS.

Presentación

Al estudiar en el anterior núcleo el comportamiento de las funciones que modelan un cierto fenómeno, la gráfica que dibujamos es continua, pero para llegar a ella, partiendo de los datos recogidos de manera discreta en un laboratorio o de encuestas, es necesario descubrir las regularidades en esas sucesiones de datos y predecir su comportamiento.

Objetivos

Investigar procesos límite a través de las sucesiones y series infinitas.

Contenidos

- Sucesiones
- Series

Problemas:

1.- Calcular la suma infinita 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ...

a) De manera concreta como el rea de un cuadrado de lado 1
b) Analizar con la calculadora la sucesión de sumas parciales
c) Generalizar el estudio a las series geométricas
d) Demuestre que 0.99999... es igual a 1

2.- Calcule los primeros tres términos de cada una de las siguientes sucesiones de sumas parciales y encuentre su límite, cuando exista.

$\{S_n\} = \{49 + .49 + .0049 + ... + (49)(.01)^{n-1}\}$
$\{T_n\} = \{.7 + .07 + .007 + ... + (.7)(.1)^{n-1}\}$
$\{V_n\} = \{1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-1}\}$
$\{W_n\} = \{1 - 1/2 + 1/4 - 1/8 + ... + (-1/2)^{n-1}\}$
$\{Q_n\} = \{2 + 2/3 + 2/9 + ... + 2(1/3)^{n-1}\}$

3.- Con los puntos medios del triángulo equilátero ABC, de lado 4 unidades, construimos el triángulo equilátero DEF y con los puntos medios de los lados de éste construimos el triángulo equilátero GHI. Suponga que este proceso de formar triángulos equiláteros se repite indefinidamente. Calcule el valor de la suma de los perímetros de todos los triángulos.

4.- Determinar el área de un círculo como el límite de la sucesión de áreas de los polígonos regulares inscritos y con un número creciente de lados.

5.- Encuentre el área A de la región acotada por el eje-x, la línea vertical x=1 y la gráfica de f(x) = x

6.- Calcule el área bajo la par bola $y = x^2$ entre los valores de x=0 y x=1, a partir de rectángulos inscritos. Para ello, partimos el intervalo [0,1] en n partes iguales y calculamos las áreas de los rectángulos con base en esas n partes iguales y alturas tales que toquen solamente con una esquina a la par bola.

a) Calcule para n=6
b) Trate de simplificar la suma de las áreas de los rectángulo para una n arbitraria
c) Investigar sobre el Principio de Cavalieri

7.- Encuentre el área de la región acotada por la curva $y = x^3$, el eje-x y la línea vertical x=1.

8.- A partir de la discusión en los tres anteriores problemas encontró que el área de la región acotada por el eje-x, la línea x = 1, y

(a) la curva $y = x^1$ es_____
(b) la curva $y = x^2$ es_____
(c) la curva $y = x^3$ es_____

¿Qué patrón aparece?, ¿Podría predecir el área bajo $y = x^4$?,

¿bajo $y = x^n$, donde n es cualquier número natural?

¿Cuál es el área de la región acotada por el eje-x, la línea x=1, y

(d) la curva y = 2x
(e) la curva $y = 2x^2$
(f) la curva $y = 2x^3$

Bibliografía:

Buchanan, Lexton, Límites, (una transición al Cálculo), México, editorial EASO.
Rivaud, Juan José, Areas, volúmenes y centros de gravedad, México, LIMUSA, 1988.

NUCLEO TEMATICO 3:
PROBLEMAS SOBRE EL MOVIMIENTO

Presentación

La búsqueda en este núcleo es utilizar los conceptos y habilidades desarrollados en los núcleos anteriores, para mostrar que en la modelación de los fenómenos que cambian continuamente respecto a una variable (el tiempo en el caso del movimiento) la derivada e integral de la función arrojan información que nos permite un análisis más profundo y cálculos más eficientes. Además, conociendo la razón de cambio o la suma de sus variaciones de un fenómeno se puede obtener la función que lo modele.

Objetivos

Que el estudiante pueda construir modelos para estudiar el cambio y el movimiento.

Contenidos

- funciones
- la velocidad y la derivada, (razón de cambio promedio e instantánea)
- la distancia recorrida y el concepto de integral
- tangentes a una curva
- función exponencial y logarítmica

Problemas:

1.- Encuentre la función cuya gráfica es la línea que contiene a los puntos (2,5) y (7,2).

2.- Encuentre la función cuya gráfica es la línea que tiene pendiente 3 y contiene al punto (2,5).

Definición:

Sea f una función y [a,b] un intervalo que es subconjunto de su dominio. La razón de cambio promedio de f en [a,b] es el número

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.- Un objeto es lanzado al aire de tal forma que su distancia a tierra (en metros) esté dada por la función $f(t) = t(6 - t)$. Encuentre la rapidez promedio del objeto en los siguientes intervalos de tiempo: [0,2], [2,3],[3,4], y [4,6]

4.- La sección transversal de un abrevadero es un triángulo isósceles con 4 pies de base y 6 de altura. La longitud del depósito es de 12 pies. Al abrir una llave llegan 16 pies cúbicos de agua por minuto.

(a) Encuentre la profundidad del agua, t minutos después de abrirse la llave. ¿Cuánto tiempo se necesita para que se llene el abrevadero?.

(b) Encuentre la razón de cambio promedio de la profundidad del agua en cada uno de los siguientes intervalos de tiempo.
[0,1], [1,2], [2,3], [3,4], [4,5], [5,6], [6,7], [7.8] y [8,9].

(c) Encuentre la razón de cambio instantánea de la profundidad del agua al tiempo t = 4 y también para t = 9.

Sugerencia: (c) si p(t) es la función profundidad, defina la sucesión

$a_n = [p(4 + 1/n) - p(4)] / [1/n]$ y trate de determinar su límite cuando n crece.

5.- Sea $f(x) = x^2$. Encuentre la ecuación de la línea tangente en el (a) punto (1,1); (b) punto (- 1,1); (c) punto (0,0)

Grafique la función y muestre a las tres líneas tangentes.

6.- Sea $f(x) = x^3$. Encuentre la ecuación de la línea tangente en el (a) punto (1,1); (b) (-1,-1); (c) (0,0).

7.- Grafique la función $g(x) = x^2 + x$

(a) Encuentre la pendiente de la línea tangente en el punto (2,6)

(b) Encuentre la pendiente de la línea tangente en el punto (c,g(c)), donde c es cualquier número real.

(c) Encuentre un punto en la curva (si existe) en el cual la pendiente de la línea tangente sea 0.

(d) Para qué valores de x la pendiente de la línea tangente en (x,g(x)) es negativa.

8.- Dada la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$, ¿para qué valores de x la pendiente de la línea tangente en (x,f(x))

(a) es positiva?
(b) es negativa?
(c) es cero?

9.- Grafique la función f(x) = 1/x para x positiva.

(a) Encuentre la pendiente de la línea tangente en (1,1)

(b) Sea c cualquier número real positivo, y sea

$s_n = [f(c + 1/n) - f(c)] / [1/n]$

Muestre que s_n se simplifica a $-1 / c(c + 1/n)$, y encuentre el límite de $\{s_n\}$ para c 1, 2,10

En general, ¿a qué número converge [sn] (en términos de c)?

(c) Usando los resultados de la parte (b), encuentre la ecuación de la línea tangente en los puntos (2,1/2) y (1/3,3). Dibuje estas líneas sobre la gráfica.

10.- Considere una familia de curvas de la forma $y = ax^2$, para a cualquier número real (excepto 0), determina un miembro de esta familia.

(a) Si a = 1, entonces en cualquier punto (c,c^2) sobre la curva $y=x^2$, la pendiente de la recta tangente es _____?

(b) Si a = 2, entonces en cualquier punto $(c,2c^2)$ sobre la curva $y = 2x^2$, la pendiente de la recta tangente es _____?

(c) Si a es cualquiera, entonces en cualquier punto (c,ac^2) sobre la curva $y = ax^2$, la pendiente de la recta tangente es _____?

11.- La altura de un objeto que se mueve verticalmente esté dada por
$s = -16 t^2 + 96 t + 112$ con s en pies y t en segundos.

a) Hállese su velocidad estando t = 0
b) su altura máxima y
c) su velocidad cuando s = 0

12.- Al principio de 1987, la población mundial era de alrededor de 5 mil millones. Se dice que para el año 2000, alcanzar 7 700 millones. ¿Cómo se hacen tales predicciones?

Para manejar el problema en forma matemática, sea y = f(t) el tamaño de la población en el momento t, donde t es el número de años después de 1987. En realidad, f(t) es un entero y la gráfica salta cuando alguien nace o muere. Sin embargo, para una gran población, estos saltos son tan pequeños en relación con la población total que no se cometer n errores si se pretende que f es una función derivable regular.

Parece razonable suponer que el aumento de población (nacimientos menos muertes) durante un corto período es proporcional al tamaño de la población al comenzar un período y a la duración de ese período. Por lo tanto

$$[f(t_1) - f(t_0)] / (t1 - t_0) = kf(t_0)$$

En su forma límite, esto da la ecuación diferencial

$$df/dt = k f$$

Si k es positiva la población crece y si k es negativa decrece. Para la población mundial, la historia indica que k vale alrededor de 0.0198 (suponiendo que t se mide en años). El problema aquí es que no conocemos a la función f, esto quiere decir que tenemos que encontrarla, revolver la ecuación diferencial. Quizá todavía no estemos listos para ello, podríamos empezar por trabajar con la función exponencial.

Bibliografía:

Buchanan, Lexton, Límites, (una transición al Cálculo), México, editorial EASO.
Moreno, Luis, Funciones logarítmica y exponencial, México, LIMUSA. 1983.

Bibliografía general:

[1] Buchanan, Lexton, Límites, (una transición al Cálculo), México, editorial EASO.

[2] López de Medrano, Santiago, Notas de Cálculo, Miscelánea Matemática, México. Sociedad Matemática Mexicana, enero 1985.

[3] Mochón, Simón, Quiero entender el Cálculo, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

[4] Purcell, Edwin J. y Dale Varberg, Cálculo diferencial e integral, 6 ed, México, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., 1993.

[5] Wenzelburger, Elfride, Cálculo diferencial - Una guía para maestros y alumnos. "Didáctica", México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1993

[6] Wenzelburger, Elfride, Cálculo integral - Una guía para maestros y alumnos, Didáctica", México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.

Autores:

María Eugenia Guzmán.