

Presentación de los programas de Matemáticas

Damos a conocer aquí los programas, que son una modificación del vigente, que es producto de un proceso de evaluación del plan de estudios del Bachillerato General. El proceso integró las valoraciones y experiencias planteadas por los profesores de Matemáticas en propuestas dadas a conocer por escrito; los acuerdos tomados en el taller citado con este propósito y del resultado de la aplicación de encuestas diseñadas para evaluar la operación de los programas de asignatura.

En la presentación particular de cada asignatura decimos, al detalle, qué fue modificado y porqué. Las matemáticas constituyen una línea de formación del individuo, que está presente a lo largo de todos los niveles educativos y con una estrecha vinculación entre grados sucesivos. Las asignaturas de Matemáticas son cuatro, que componen la formación esencial en el área de Matemáticas de un bachiller.

Contribuye ésta, además, a crear el marco teórico de la física y es una herramienta fundamental para el desarrollo de esta ciencia, así como de otras disciplinas científicas y técnicas, como la química, la biología y, actualmente, la economía, asignaturas que se incluyen en el plan de estudios del Bachillerato. La enseñanza de las matemáticas en el nivel bachillerato tiene como propósitos importantes:

- Desarrollar en los estudiantes nociones y conceptos que les sean útiles para comprender su entorno y acceder a otras áreas del conocimiento y la actividad humana.
- Proporcionar un conjunto de procedimientos y formas de pensamiento propias del razonamiento lógico; en particular del inductivo-deductivo, indispensable en la comprensión y aplicación de los diferentes métodos y conceptos matemáticos.
- Que el estudiante adquiera habilidades de abstracción, de análisis y de síntesis, al igual que capacidades para desglosar y sistematizar ideas y métodos.
- Desarrollar la capacidad del estudiante para explorar y buscar soluciones a problemas, a través del dominio del lenguaje de la matemática y de los modelos que esta disciplina desarrolla.
- Que el estudiante desarrolle aptitudes para comunicar y justificar sus afirmaciones.

Los temas para las asignaturas del área de Matemáticas están presentadas por ramas de la materia y en la secuencia en que se mencionan plantea un orden para su enseñanza; sin embargo, éste no es absoluto, algunas ramas se retoman explícitamente a lo largo de varios semestres, con el objetivo de madurar ciertos aspectos que requieren de periodos largos para ser asimiladas.

La aritmética: el cálculo numérico, las propiedades de los números y sus operaciones - en general-, son el objeto de estudio de la aritmética. Aunque esta rama se estudia desde los niveles escolares elementales, en el nivel bachillerato se pretende desarrollar una visión más profunda de ella y consolidar el significado y el

uso pertinente de las operaciones, así como sus propiedades, en la solución de problemas.

La probabilidad y estadística: el azar nos envuelve, aparece en todas partes, en el juego de lotería, en la determinación del sexo del hijo, en los pronósticos del clima; en fin, muchos aspectos de la vida cotidiana están rodeados de incertidumbre. Hoy se acepta que no lo podemos saber todo y, por tanto, tampoco podemos preverlo todo, pero el estudio de la probabilidad nos permite determinar el grado de certeza de la ocurrencia de ciertos fenómenos. Complementariamente, la estadística trata de manejar la información de manera tal, que posibilite, ya sea por medio de gráficas o de indicadores numéricos, tener una idea precisa del comportamiento de ciertas poblaciones o fenómenos con finalidades tanto descriptivas como de predicción.

El álgebra: el lenguaje algebraico constituido por números y símbolos. Éstos últimos, que representan una cantidad a determinar, una variable o números generalizados, y la manipulación de ese lenguaje algebraico para la solución de problemas, constituyen la finalidad principal de la enseñanza del álgebra. Se pretende que se desarrollen a la par y, complementariamente, habilidades para la representación generalizada de situaciones concretas o, dicho de otro modo, la traducción al lenguaje algebraico de problemas planteados en prosa. También, habilidades de manejo algebraico, como operaciones, solución de ecuaciones, productos notables y factorización, etc. Esta formación es básica para emprender cualquier estudio científico, dado que el álgebra favorece la organización y manipulación de conceptos abstractos y permite modelar situaciones, por ejemplo, de la física o química, como el cálculo de velocidades, aceleración, caída libre, presión, etcétera. A partir de estos modelos se resuelven problemas, se plantean hipótesis, se hacen predicciones.

La geometría euclidiana: el hecho de ser los elementos físicos y el espacio los referentes inmediatos donde se verifican los resultados de la geometría, permite que ésta sea un campo fértil para el desarrollo del pensamiento lógico y la formalización. La geometría puede constituir un medio de transición entre lo concreto y lo abstracto, que favorezca el desarrollo de la capacidad de abstracción en los alumnos, así como que desarrollen su imaginación espacial, sus habilidades para el dibujo y la construcción geométrica, su creatividad, y se inicie en el pensamiento deductivo.

La trigonometría es uno de los temas de la geometría elemental más aplicable en la solución de problemas de medición y de problemas diversos de la tecnología actual, es requisito indispensable para el estudio de la gran mayoría de las carreras técnicas y científicas, por lo que es importante su presencia en los planes de estudio del Bachillerato.

La geometría analítica: esta rama de las matemáticas está ligada a la física y a otras áreas del conocimiento. Es antecedente, tanto a nivel formativo como histórico, del cálculo diferencial e integral. En ella se relacionan el álgebra y la geometría, a partir del método de coordenadas. Las propiedades, como distancia, parale-

lismo, etcétera, de los elementos geométricos como puntos, líneas y figuras, adquieren, por el método de coordenadas, una representación algebraica simbólica. Las figuras y sus propiedades geométricas se expresan por medio de ecuaciones, desigualdades o sistemas, lo que nos permite llevar problemas geométricos a operaciones algebraicas y cálculo aritmético, demostrar teoremas geométricos mediante el álgebra. Por otro lado, dada una expresión algebraica, es posible estudiarla a través de su interpretación geométrica.

El cálculo diferencial e integral. Esta rama integra y potencia los conocimientos matemáticos adquiridos en la formación anterior, su estudio es deseable para los alumnos que pretenden continuar sus estudios universitarios, pero no se plantea como materia obligatoria. El cálculo permite construir modelos de fenómenos que cambian en el tiempo, es por ello que sus aplicaciones se extienden a muchos ámbitos del conocimiento, desde los más naturales (la física y la química) hasta los que no se podían considerar afines, como la lingüística y la sociología, como también la economía, la epidemiología y la biología.

La siguiente es una tabla que ubica la presencia de las distintas ramas de las matemáticas en los diferentes semestres. La distribución de los temas y conceptos específicos que se deben ver en cada semestre la determinan los programas del curso respectivo. Las asignaturas de Matemáticas en los primeros cuatro semestres son obligatorias, las de quinto y sexto son optativas, fundamentalmente para los alumnos que pretenden continuar sus estudios en el área de Ciencias Exactas e Ingeniería.

Asignatura/ materia	Matemáticas I	Matemáticas II	Matemáticas III	Matemáticas IV	Taller de Estrategias para la resolución de proble- mas	Introducción al Cálculo
Aritmética	•	•	•	•	•	•
Álgebra	•	•	•	•	•	•
Trigonometría	•	•	•	•	•	•
Geometría Euclidiana			•	•	•	•
Geometría Análítica				•	•	•
Probabilidad y Estadística	•	•			•	•
Cálculo Dif e Integral						•

Figura 1. El punto • indica la presencia explícita como tema de estudio en la asignatura de la columna correspondiente. El punto hueco denota la presencia implícita de la materia, que se utiliza y se profundiza, pero no es el tema explícito de estudio.

La primera asignatura establece el enlace entre el nivel de secundaria y el inicio de una etapa que debe avanzar, en cuanto al grado de profundidad, de abstracción y de generalización del conocimiento matemático y abarca los temas de aritmética y el inicio del álgebra, que se extiende hasta la segunda asignatura. Además, en estas primeras dos asignaturas se tratan los temas de probabilidad y estadística. Las asignaturas para el tercero y cuarto semestres se enfocan a la geometría y a la trigonometría, aunque ésta última es también un tema considerado de manera introductoria en las dos asignaturas iniciales. En la tercera el enfoque es el llamado sintético o euclidiano, y en el cuarto es analítico o cartesiano. Por último, se formularon dos asignaturas optativas enfocadas a retomar el conocimiento alcanzado en los cursos obligatorios: el Taller de estrategias para la solución de problemas y la Introducción al cálculo.

Orientaciones metodológicas

Enlistar las materias y sus temas no es una tarea difícil, enseñarlo a los alumnos es un problema interesante, con muchas soluciones posibles, aunque a veces resulta muy difícil cubrir de manera exhaustiva todos los temas de un plan de estudios. Ante tal situación, pensamos que, por una parte, los alumnos tienen que saber algunos conceptos de matemáticas y, aún más importante, poder aplicar estos conocimientos a situaciones problemáticas. Pero sólo se puede aprender a resolver problemas resolviéndolos, es por ello que proponemos esta actividad como la parte medular de la enseñanza en esta área.

Es necesario que los contenidos se presenten a partir de situaciones y actividades que tengan sentido para los estudiantes y les permita generar conjeturas, analizarlas con sus compañeros y poner en juego, de manera consciente, los conocimientos adquiridos con anterioridad. Hay que aclarar que los llamados problemas no son los ejercicios que aparecen en el texto, después de revisar cierto concepto, donde éste se aplica de tal o cual manera. Los problemas serán situaciones donde hay que definir desde qué tipo de conocimientos utilizar, cuál información es realmente importante en el enunciado, preguntarse qué problemas que se le parezcan he resuelto antes.

Inicialmente esto es muy complejo, aunque a medida que se desarrollan las habilidades, es más sencillo orientar a los alumnos y ellos piden y preguntan de los temas a los que llevan los problemas que le son interesantes. En la resolución de problemas se pueden distinguir dos etapas: la búsqueda de una vía de solución y la exposición de la solución.

La búsqueda de la vía de solución puede realizarse individual o colectivamente, cuando se realiza colectivamente, cada estudiante expone sus ideas y no se permite que critique las de otro compañero, por fantásticas que parezcan, después de unos diez o quince minutos, el profesor hace el resumen y lo podría exponer de la siguiente manera:

“El método que tiene más perspectivas es...”.

Entonces, sus partidarios lo defienden, se aclaran las dudas sobre el problema y se complementa el camino con la participación colectiva. Si todavía no está claro el camino de solución, se inicia otra sesión de lluvia de ideas. De hecho, la búsqueda individual queda incluida en la colectiva, dado que cada estudiante busca un camino, el cual propone, para luego discutirlo de manera colectiva. Dentro de la primera etapa podemos observar que, de súbito, aparece una idea y se entiende cómo resolver el problema, este momento se le conoce como *insight*, o iluminación. Es difícil para el profesor poder entender cómo el estudiante llegó a ese momento, pues es un proceso que se da en el subconsciente, pero en la medida que se entienda la solución de un problema, se podrán crear condiciones en el salón de clases para que el estudiante se acerque a ese momento.

Una vez que se encuentra el camino, es necesario comprobar que sirve, es decir, se verifica si a partir de los datos iniciales se llega a la solución, no es necesario

hacer en clase todos los cálculos, se recomienda dejar de tarea un problema, donde escriban la solución detallada, así se podrán trabajar 3 ó 4 problemas, discutiendo esencialmente los esquemas de razonamiento seguidos. Es importante insistir en la diferencia entre las dos etapas, sobre todo porque en los textos, el estudiante sólo encontrará la exposición de la solución.

La solución de problemas en el salón de clases es una actividad que requiere tiempo para realizarse, si éste se acorta indebidamente, la actividad pierde sentido o se dejan de satisfacer los objetivos buscados. Por ello, es importante que se considere el tiempo suficiente para que la actividad se desarrolle en forma completa y que los problemas planteados sean accesibles a los estudiantes y provoquen una actitud de búsqueda.

Las actividades sugeridas que aparecen en cada Unidad son propuestas para que el profesor y su academia elaboren secuencias de problemas y ejercicios a seguir en clase, bajo la dinámica de solución de problemas, con las adaptaciones necesarias, según el número de alumnos, el tiempo disponible o la evaluación que haga el profesor en cuanto al avance de los estudiantes.

También se recomienda el uso de la calculadora por diversas razones: puede utilizarse como un recurso para la ejecución de cálculos en la resolución de problemas, permitiendo que el estudiante se centre en el método de solución y asimile mejor los conceptos y operaciones involucrados; además, puede proponerse como un medio de aprendizaje para practicar conocimientos, por ejemplo, la jerarquía de las operaciones y el uso de los paréntesis, notación exponencial, así como el de aproximación y redondeo.

Ningún método aislado resuelve el problema de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en su totalidad. Las clases magistrales tienen su importancia, lo mismo que los ejercicios de mecanización y demás actividades por siempre realizadas. Lo más importante es elegir el mejor método en el momento y con el tema adecuado. Los programas son una línea para el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje, pero en cada salón de clase se tienen que resolver un sinnúmero de detalles sobre la didáctica, los contenidos y las formas que deberá tomar la evaluación, la operación de los programas que tienen que ser planteadas en la Academia.

En resumen, se plantea que el papel del profesor en el aula se centre en propiciar y coordinar la presencia de tres aspectos fundamentales: a) la inducción y motivación del aprendizaje; b) la orientación sistémica hacia la construcción del conocimiento; c) la consolidación y retroalimentación del aprendizaje.

hay que reaprenderlo para poder seguir adelante, ésta es una de las explicaciones de la dificultad de asimilar matemáticas, éstas son acumulativas, si no ponemos buenos cimientos, nuestro propio edificio matemático se derrumbará tarde o temprano. Por eso destacamos la importancia del trabajo de los profesores en su Academia, para que se busquen soluciones que permitan un tránsito fluido de los alumnos por las asignaturas de Matemáticas.

Matemáticas I

Academia de:	Matemáticas
Departamento de:	Ciencias formales
Semestre en el que se cursa:	primero
Carga horaria semanal:	5 horas
Distribución de la carga horaria semanal:	dos de 2 horas y una de 1 hora
Carga horaria semestral:	85 horas
Periodo de elaboración:	enero de 1993
Periodo de modificación:	septiembre de 1998

Presentación

Este curso es continuación de Matemáticas del ciclo de la educación media básica y el propósito es consolidar y profundizar los conceptos de la aritmética, así como tópicos acerca de la organización y tratamiento de la información orientadas a su tratamiento estadístico, por lo que también se reafirman conceptos de probabilidad. Por último, se discuten los temas de lenguaje algebraico y las ecuaciones de primer grado, lo que es la línea de continuidad con la siguiente asignatura de esta área.

Las modificaciones al Programa anterior consisten básicamente en que en la primer Unidad se da menos peso al estudio de los diferentes sistemas de numeración, siendo el decimal el que se estudia con detalle. Se incorporó, además, como subtema, el significado de las operaciones aritméticas en la solución de problemas, sugerencia reiterada por parte de las diferentes academias de matemáticas. La notación desarrollada y científica y los sistemas de medición permanecen como subtemas.

Por otro lado, se adelanta el estudio de los números enteros, las fracciones y los reales, y se aglutinan los temas de conteo, probabilidad y estadística; ambos cambios, porque de esta manera se logra una mejor continuidad en el Programa.

Se elimina la unidad de sucesiones y series, por considerarse que requiere una madurez matemática por parte de los alumnos, que en su mayoría no han alcanzado, y que puede estudiarse en el siguiente curso, en la parte de temas selectos de álgebra.

Finalmente, se da más peso al estudio del álgebra, culminando con el estudio completo de las ecuaciones de primer grado, que permita el inicio en el curso de Matemáticas II con sistemas de ecuaciones lineales. El Programa consiste de las siguientes seis unidades:

1. Sistema decimal.
2. Divisibilidad.
3. Fracciones y reales.
4. Conteo y probabilidad.
5. Estadística.
6. Lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado.

Objetivos generales del Curso

- Recuperar, reorganizar y profundizar la formación matemática adquirida en los ciclos educativos anteriores
- Completar la conceptualización de los diferentes tipos de números que conforman a los reales, ubicando el papel teórico y práctico que desempeñan cada uno de ellos.
- Contar, manejar e interpretar información obtenida tanto de diferentes poblaciones o muestras, como de situaciones aleatorias diversas.
- Proponer y resolver problemas, conjeturar y formular resultados generales; además, partiendo de ejemplos y contraejemplos, construir sencillas demostraciones.
- Practicar constantemente el cálculo y la estimación mental de resultados, así como usar inteligentemente la calculadora científica.
- Utilizar el lenguaje simbólico del álgebra para expresar relaciones entre cantidades; operar con este lenguaje y emplearlo en el planteo y solución de problemas que requieran de ecuaciones de primer grado.

Orientaciones metodológicas

Los temas centrales de este curso de Matemáticas I son aritmética y álgebra; sin embargo, se propone que se traten de una forma integrada, relacionándolos con otras áreas tanto de la matemática, por ejemplo, la geometría, como de otras disciplinas.

La aritmética no se reduce a los algoritmos para hacer operaciones. Estamos tan familiarizados con la aritmética, que con frecuencia olvidamos las dificultades que encierra su aprendizaje y el papel que juega en la comprensión de otras partes de las matemáticas. La aritmética constituye la base intuitiva del álgebra y de casi todas las matemáticas escolares, hasta niveles universitarios.

La enseñanza de la aritmética debe servir para que los alumnos desarrollen su sentido del número. La comprensión del significado de las operaciones facilitará el aprendizaje de los algoritmos y sus aplicaciones en la vida cotidiana y en la solución de problemas. Es conveniente, asimismo, que exploren lo que ocurre al modificar los números que intervienen en un cálculo o los datos de un problema.

Los alumnos deben comprender los principios que hacen de las matemáticas y, en particular, de la aritmética, un cuerpo coherente de conocimientos y no quedarse con la impresión de que se trata de una serie de conocimientos aislados.

En cuanto al enfoque de la probabilidad y la estadística, tener en cuenta que muchos de los fenómenos que nos afectan se han vuelto tan complejos que no se pueden analizar solamente de forma cualitativa, se requiere además de técnicas cuantitativas de recolección y tratamiento de información. Debemos hacer énfasis en construir referentes que permitan apreciar la magnitud de ciertas cifras, sobre todo si vienen dadas por números muy grandes o muy pequeños o en forma de tasas o porcentajes.

El álgebra representa la transición entre la aritmética y la geometría y las matemáticas de grados superiores, que requieren de ella para modelar situaciones y resolver problemas, así como para expresar conceptos y operar con ellos en niveles cada vez más abstractos.

El aprendizaje del álgebra es importante para todos los alumnos y no sólo para aquellos que van a estudiar una carrera afín a la matemática. Aun actividades que se han vuelto tan cotidianas y necesarias para el trabajo, como llenar un formulario o leer un instructivo o manual de operación, necesitan que las personas conozcan y estén familiarizadas con los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto, como son poder extraer información de cuadros, tablas y gráficas, comprender fórmulas y saber utilizarlas.

Para favorecer el estudio del álgebra conviene que los alumnos se acostumbren desde el inicio del curso de Matemáticas I, que se abordan temas de aritmética, a utilizar expresiones con literales, y a aplicar reglas sencillas de escritura y operación de símbolos.

La adquisición de las nociones algebraicas toma tiempo para completarse, y no todos los alumnos aprenden con la misma facilidad. Es importante que los alumnos utilicen constantemente el álgebra para resolver problemas que doten de sentido a las nociones y procedimientos. El profesor deberá diseñar actividades que comuniquen a los estudiantes la importancia que tiene pasar de una situación o enunciado verbal a su expresión simbólica y operar con ella.

Unidad I

Sistema decimal

Tiempo sugerido: 8 horas.

Presentación

Esta primer Unidad pretende retomar muchos de los temas de aritmética estudiados en los ciclos escolares anteriores, replanteando el significado de los números y su forma de representación, así como el de las operaciones aritméticas para resolver problemas. Se revisan, además, los sistemas de medición, dado que tienen una vinculación directa con disciplinas de las ciencias naturales; las mediciones y conversiones de diferentes unidades de medidas se trabajan específicamente en esta unidad.

Objetivos

- El alumno enriquecerá el significado de las operaciones aritméticas con números decimales, a través de la solución de problemas que involucren a varias de ellas.
- El alumno será capaz de establecer las ventajas de la representación de los números en el sistema decimal, expresándolos en su notación desarrollada.
- El alumno utilizará y apreciará las ventajas de la notación científica en el sistema decimal, al operar y establecer relaciones de orden en cantidades astronómicas y microscópicas.
- El alumno será capaz de hacer conversiones de diferentes sistemas de medición al decimal y viceversa.

Contenidos temáticos

- Sistemas no posicionales y posicionales.
- Sistema decimal: orden, notación desarrollada y notación científica.
- Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis
- Operaciones aritméticas, problemas.
- Sistemas de medición: decimal, inglés, sexagesimal, etc.

Actividades de aprendizaje

1. Preguntar a los alumnos, acerca de cuáles sistemas de numeración conocen.
2. Consultar cuáles símbolos y reglas se emplean en sistemas de numeración no posicionales, como el egipcio y el romano. Escribir algunas cantidades.
3. Consultar los símbolos y reglas empleadas en el sistema maya y escribir algunas cantidades.
4. Construir el sistema binario, y escribir algunos números.
5. Escribir algunos números en notación desarrollada en base 10 y en base 2.
6. Plantear algunos números en base diez y pedir que se encuentre un algoritmo para convertirlo a base 2.

7. Con base en la notación desarrollada de números enteros en el sistema decimal, plantear el problema de cómo será la notación desarrollada en decimales.
8. Que investiguen de la física o de la química algunas cantidades astronómicas y microscópicas (número de Avogadro, masa del electrón, años luz, Amstrong, etcétera) y estudiar cómo se puede introducir el dato en la calculadora.
9. Plantear la suma y producto de algunos números de la actividad anterior, conjeturar sobre el posible resultado, hacerlo con la calculadora y sacar conclusiones.
10. Resolver ejercicios que involucren las cuatro operaciones aritméticas y con paréntesis. Aprender a hacerlo con la calculadora.
11. Plantear problemas que para su solución se realicen varias operaciones aritméticas.
12. Investigar qué tipo de unidades se usan para medir: longitudes, áreas, volúmenes, capacidad, tiempo, etcétera, en el sistema métrico decimal y en el inglés. Considerar algunos múltiplos y submúltiplos.
13. Hacer algunas conversiones de múltiplos o submúltiplos, en unidades del mismo sistema. Compararlas con las que se hacen en el sistema métrico decimal y sacar conclusiones.
14. Encontrar equivalencias de algunas unidades de otros sistemas, con sus respectivas del sistema métrico decimal.
15. Resolver problemas de otras disciplinas relativos a conversión de unidades.

Unidad 2

Divisibilidad

Tiempo sugerido: 7 horas.

Presentación

Se ha dicho que un tema aún virgen de las matemáticas es el relativo a la teoría de números, a pesar de que su origen se pierde en el tiempo. El manejo de los números enteros, además de tener aplicaciones prácticas inmediatas, es fascinante, por la posibilidad que ofrece al principiante para hacer múltiples conjeturas, e iniciarse en la demostración de sencillos teoremas. La magia de los números primos se pone de manifiesto al tratar de resolver algunos problemas

Objetivos

- El alumno será capaz de formar varias clases de números enteros a partir del acuerdo de alguna caracterización.
- El alumno enunciará sencillos teoremas sobre divisibilidad y los demostrará a partir de la notación desarrollada de los números.
- Con base en la noción de múltiplo y divisor, el alumno desarrollará algoritmos para encontrar el m.c.m. y m.c.d. de dos o más números.

Contenidos temáticos

- Divisores y primos
- Criterios de divisibilidad entre 2, 3, 4, 5, 11, etc.
- Mínimo común múltiplo (m.c.m.) y máximo común divisor (m.c.d.)

Actividades de aprendizaje

1. Encontrar los divisores de algunos números de dos y tres cifras, puede usarse la calculadora. De acuerdo al número de divisores (dos o más), caracterizar a primos y compuestos.
2. Pedir a los alumnos que localicen los primos entre: el uno y el diez; el uno y el veinte; el uno y el treinta. Inducirlos a que lleguen al modelo de la criba de Eratóstenes y la usen para localizar los primos entre el uno y el cien.
3. Plantear a los alumnos el problema de ¿cómo se puede estar seguro de haber incluido todos los divisores de un número? Llevarlos a la descomposición en factores primos y desde aquí tratar de resolver el problema.
4. Hacer algunos ejercicios de descomposición en factores primos de números compuestos y pedir a los alumnos que enlisten por orden a los divisores de cada número. Que propongan un procedimiento para el enlistado de los divisores y traten de justificar su validez. Problema: ¿dada la descomposición en primos de un número, cuántos divisores tiene, incluyendo a él mismo y al 1?
5. Inducir a los alumnos a buscar algunos criterios de divisibilidad a través de problemas como:

- a) Hallar la menor cifra que debe añadirse al número 124, para que resulte un número de cuatro cifras múltiplo de 3.
 - b) Escribir un número de nueve cifras (sin que se repita ninguna), que sea múltiplo de 11.
 - c) Hallar un múltiplo de 12 que esté escrito con los diez dígitos usados solamente una vez y que además sea el mayor posible.
6. Con la ayuda del concepto de múltiplo, notación desarrollada y el hecho de que «si un número divide a otros dos entonces divide a su suma»; demostrar los criterios de divisibilidad entre 2, 3, 4, 5, 9 y 11, por lo menos.
 7. Dando dos o más números, pedir a los alumnos que hallen todos los divisores comunes a ellos; busquen un procedimiento, lo justifiquen y comprueben los resultados.
 8. Dando algunos números, pedirles que encuentren por orden, los primeros múltiplos de los números dados; busquen un procedimiento, lo justifiquen y comprueben los resultados.
 9. Analizando los resultados de las dos actividades anteriores, llegar al concepto de: m.c.m. y m.c.d.
 10. Resolver problemas como:
 - a) María tiene tres cortes de tela de 35, 49 y 42 metros, respectivamente. Si desea hacer cortinas de igual tamaño y sin desperdiciar nada. ¿De qué longitud debe cortar cada cortina?
 - b) Como promoción en sus ventas, una fábrica de refrescos pone un cupón para un refresco gratis cada 80o refresco y otro cupón para dos refrescos gratis cada 120o refresco. ¿Con qué frecuencia pone ambos cupones en un solo refresco?
 - c) Tenemos una fuente y dos jarras una de 5 litros y la otra de tres litros, ¿cómo podemos medir 4 litros, si las jarras no están graduadas y no hay un tercer recipiente?
 11. Con la descomposición en factores primos, de dos o más números, tratar de que el alumno desarrolle el algoritmo para hallar el m.c.m. y el m.c.d.
 12. Resolver problemas como:
 - a) La suma de dos números es 240 y su m.c.m. es 1768. ¿Cuáles son esos números?
 - b) Si el m.c.d. de dos números es 4 y su m.c.m. es 40. Encontrar tales números, sabiendo que su suma es la menor posible.

Unidad 3

Fracciones y reales

Tiempo sugerido: 20 horas.

Presentación

La noción y manejo de fracciones y decimales, además de tener amplias aplicaciones en la vida cotidiana, permite acceder al estudio de los irracionales y de su expresión aproximada como número decimal. Aparte, los conceptos de infinito y continuo, centrales en el desarrollo de la matemática y otras ciencias, tienen sentido, cuando los alumnos se apropian del concepto de número real.

Como una aplicación inmediata de los números fraccionarios y reales, se desprenden los temas de porcentajes y variación proporcional, que apoyan el desarrollo de la noción de función y el análisis del comportamiento del seno y coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo, antecedentes necesarios para el curso de Física I, que llevarán los alumnos en el segundo semestre.

Objetivos

- Que el alumno asimile los conceptos de unidad y partición, a través de la elección de la unidad adecuada, dependiendo del problema planteado.
- Que el alumno sea capaz de transformar la noción de equivalencia de fracciones, en el desarrollo de los algoritmos de las operaciones y en la relación de orden.
- Que el alumno realice conversiones entre fracciones y decimales, y elija la forma que le facilite la aplicación de algoritmos en la solución de un problema dado.
- Que el alumno maneje los porcentajes, interpretándolos en forma de fracción y decimal, dependiendo del problema planteado.
- Que el alumno desarrolle la noción de variación proporcional directa e inversa, con el auxilio de tablas y gráficas, generando sencillos modelos algebraicos.
- Que el alumno sea capaz de establecer la igualdad de dos razones, cuando se le planteen problemas.
- Que el alumno llegue al concepto de irracional, a través de su expresión aproximada con números decimales, fracciones y modelos geométricos.

Contenidos temáticos

- Unidad y partición.
- Equivalencias y orden de fracciones.
- Expansión decimal finita y periódica.
- Conversiones de expresiones decimales a fracciones.
- Operaciones: suma, resta, multiplicación, división y potencia.
- Porcentajes.
- Variación proporcional (tablas y gráficas).
- Los números e , π , raíz cuadrada de 2, etc.
- Introducción al seno y coseno de un ángulo.

Actividades de aprendizaje

1. En una cuadrícula de 5x5 o en un geoplano, se les pide a los alumnos que construyan una unidad que, dependiendo de la posibilidad de colocar ligas sobre el geoplano o dibujar sobre las intersecciones de la cuadrícula, pueda partirse en:
 - a) mitades.
 - b) tercios.
 - c) mitades, pero no en tercios.
 - d) sextos, ¿pueden partirse en tercios y medios?
 - e) plantear otros problemas análogos.

Construcción del geoplano: en una tabla de madera delgada o triplay (15X15 cm), se colocan clavos despuntados para atornillar ligas de colores. Los clavos definirán la cuadrícula, colocándolos en los vértices o centros de los cuadrados.

2. Dada una figura, que es $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$, de cierta unidad, ahora el ejercicio consiste en elaborar la posible unidad.
3. Construir unidades en el geoplano o cuadrícula, que acepten diferentes particiones; tomar una parte y llegar a establecer diferentes clases de equivalencias. Ejemplos: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\dots$; $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\dots$; $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\dots$; etcétera. Deducir que la generación de fracciones equivalentes a una dada, se produce multiplicando numerador y denominador por un mismo número diferente de cero.
4. Establecer las relaciones de orden, a través de la equivalencia de fracciones. Esto es, comparar fracciones transformándolas con el mismo denominador y, a partir de esta idea, construir un algoritmo, para comparar fracciones. Representar algunas en la recta numérica.
5. Considere a las fracciones como división del numerador entre el denominador, efectúe éstos en la calculadora o a mano, y verificar que las relaciones de orden se conservan, así como la equivalencia.
6. Hacer una tabla de la expansión decimal de algunas fracciones, y tratar de determinar qué denominadores dan expansiones finitas y cuáles dan periódicas.
7. Retomando los ejercicios de la actividad 6, encontrar la fracción correspondiente a un decimal (periódico o finito) dado.
8. Hallar la suma de dos o más fracciones de la misma unidad (en el geoplano o en una cuadrícula), cuando el denominador es el mismo y cuando son diferentes.
9. De las fracciones de diferente denominador, notar que la búsqueda de equivalentes se facilita encontrando el m.c.m. de los denominadores. Hacer ejercicios varios de suma (y resta).
10. Comparar la suma de decimales con la adición de las respectivas fracciones. Ejemplo: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.666\dots$; por otro lado, $\frac{1}{3}=0.333\dots$. Es decir, de manera aproximada, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0.3+0.3=0.6$; en conclusión, trabajar con fracciones da resultados exactos, mientras que con decimales, en ocasiones da sólo resultados aproximados.
11. Con ayuda del geoplano o cuadrícula, calcular fracciones de fracciones, como: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, etc.

12. Establecer que la preposición «de» de la actividad anterior, equivale a la multiplicación. Desarrollar el algoritmo del producto, y volver a comparar.
13. Retomar la notación científica cuando se efectúa el producto de decimales. Hacer ejercicios manualmente y verificar con la calculadora.
14. Ejercitar las operaciones, combinando las fracciones con los decimales.
15. Con un problema de la realidad, llegar a la noción de porcentaje.
16. Resolver variados problemas, utilizando al porcentaje en la forma decimal y de fracción. Con problemas como:
 - a) Exprese en %, a $\frac{3}{4}$.
 - b) ¿Cuánto es el 40% de 5?
 - c) ¿Qué fracción es equivalente a 325%?
17. Problemas de razones y proporciones:
 - a) Una cortina mide 150 cm de ancho y 14 dm de largo. Encuentre la razón entre el ancho y largo.
 - b) Si la razón entre dos números es 7:3, y su diferencia es 20. Encuentre los números.
18. Efectuar problemas de variación directa e inversa (hacer tablas):
 - a) Si tengo 5 lápices que me costaron \$30. ¿Cuánto me costarán 2,6,10, etc.
 - b) Si 10 hombres hacen un trabajo en 5 días, 4, 7, 12 hombres lo harán en.
 - c) ¿qué relación hay entre tiempo y distancia recorrida por un móvil con velocidad constante? llegar a la conclusión de que la rapidez varía directamente proporcional a la distancia e inversamente proporcional al tiempo.
19. Con auxilio del teorema de Pitágoras, ubicar en la recta numérica de los reales a raíz cuadrada de dos, aplicar el algoritmo para obtenerla y comentar sobre si este proceso termina y si será periódico.
20. Con ayuda de la calculadora, sumar algunos términos de la serie: $1/0!+1/1!+1/2!+1/3!+...$ y analizar qué pasa cuando se aumentan sumandos. Nombrar el número e. Obtenerlo en la calculadora y hacer comparaciones.
21. Definir π como el área de un círculo de radio unitario y dibujar el modelo geométrico de polígonos inscritos y circunscritos aumentando el número de lados (comenzando con el cuadrado o el triángulo equilátero, por bisecciones sucesivas de los arcos) y preguntar si ese proceso es finito o infinito. Determinar la naturaleza de π .

Unidad 4

Conteo y probabilidad

Tiempo sugerido: 15 horas.

Presentación

En esta Unidad se trabajará con los números naturales en el contexto más cotidiano, que es el de contar, así como con una de las aplicaciones del conteo, la probabilidad. Las estrategias de conteo se abordarán a través de la solución de problemas, para crear en el estudiante la necesidad de generar un método para contar con orden y, posteriormente, discriminar los diferentes modelos.

La probabilidad responde a la necesidad que plantean los nuevos programas de que las asignaturas tengan un carácter práctico. Los fenómenos aleatorios son aquellos en los que no se puede predecir su resultado con certeza, pero el grado de incertidumbre puede reducirse, si se hace un análisis de las condiciones involucradas en el fenómeno; ésta es una de las cuestiones fundamentales que estudia la probabilidad. En esta rama de la matemática se utiliza el lenguaje de conjuntos, se propone que en este momento se desarrollen los conceptos necesarios.

Objetivos

- El alumno desarrollará sus propias estrategias de conteo.
- El alumno será capaz de resolver problemas de conteo que propicien el uso de diagramas de árbol, arreglos rectangulares, tablas y otros tipos de representaciones, independientemente de si usa o no fórmulas matemáticas.
- El alumno empleará la noción de probabilidad como recurso para orientar la toma de decisiones en situaciones aleatorias sencillas.
- El alumno enumerará los resultados de un experimento aleatorio y usará la noción clásica para calcular la probabilidad de eventos. Deberá establecerse una distinción entre las nociones clásica y frecuencial de probabilidad.

Contenidos temáticos

- Diagramas de árbol.
- Principio multiplicativo (principio fundamental del conteo).
- Principio aditivo.
- Permutaciones y combinaciones.

Actividades de aprendizaje

1. Plantear problemas que motiven al alumno a crear estrategias de conteo, por ejemplo, ¿cuántos cuadrados de todos los tamaños están contenidos en una cuadrícula de 3×4 ?
2. Generar el principio multiplicativo, planteando problemas como:
De la ciudad A a la B conducen cinco caminos, y de la B a la C, tres caminos. ¿Cuántos caminos que pasen por B, conducen de A a C? Introducir la noción de diagrama de árbol y con él, el principio multiplicativo.

3. Generar el principio aditivo, planteando problemas como: Matilde tiene monedas de \$1, \$5 y \$10. ¿De cuántas maneras puede pagar \$20 por un peine? *Sugerencia:* Formar una tabla.
4. Definir factorial de un número y efectuar algunos ejercicios a mano y en la calculadora. Analizar cómo se incrementa el factorial y hacer observaciones de su comportamiento.
5. Generar la noción de permutación, planteando problemas como: con los dígitos 1, 2, 3, 4, y 5; ¿cuántos números enteros positivos de cinco dígitos pueden formarse, si los dígitos no pueden repetirse?
6. Analizar lo que ocurre en las permutaciones con repetición, resolviendo problemas como: ¿Cuántas permutaciones diferentes se pueden hacer con las tres letras A, A y B si una A es de color rojo y la otra de color verde o si las dos As son del mismo color?
7. Con base en los resultados de la actividad anterior, llegar a la noción de combinación.
8. Discutir la noción de eventos azarosos y deterministas. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado el que caiga el número 2, es un evento azaroso, pero es determinista o seguro el hecho de que al arrojar el dado caerá mostrando una de las caras.
9. Diseñar experimentos para realizarse grupalmente sobre lanzamientos de monedas, dados, cartas de barajas, urnas, etcétera, para establecer los conceptos de evento, de espacio muestra y de probabilidad de eventos, a partir por ejemplo de que cada grupo lance dos dados y se plantee la pregunta; ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados la suma de los números sea cinco? También cada grupo en una bolsa de tela oscura coloca diez bolas numeradas, del 1 al 10. Se selecciona una al azar, y se pide obtener la probabilidad de que: a) Se elija una bola con número par. b) Salga el número 6. c) No salga el número 6.
10. Realizar experimentos para entender la noción de probabilidad condicional: en una urna hay 5 canicas blancas y 4 negras, en otra se tienen 3 blancas y 2 negras y, en una tercera, 6 blancas y 5 negras. Si se selecciona al azar una de las urnas y se saca una canica, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
11. Establecer una clara distinción entre las nociones clásica y frecuencial de probabilidad. Por ejemplo, tratar de adivinar la cantidad de fichas rojas y azules que hay en una urna haciendo múltiples ensayos, y establecer que en la medida que se hagan mayor número de ensayos, aumenta la certeza sobre la respuesta pedida.

Unidad 5

Estadística

Tiempo sugerido: 10 horas.

Presentación

La estadística es una ciencia sumamente útil como auxiliar de otras disciplinas, además de tener gran aplicación en la vida cotidiana. No es raro ver y oír resultados de las encuestas para tal o cual fin; la aplicación de promedios aritméticos para estimar un fenómeno o un comportamiento de una población, la popularidad de un personaje, la posición que guardan en un certamen los equipos deportivos.

En esta unidad se aborda el estudio de índices o tasas de: mortalidad, migración, crecimiento económico, etcétera; la elaboración e interpretación de tablas y gráficas; la obtención de modas, medias y medianas de determinado número de datos, así como el análisis de la dispersión de dichos datos, para que las medidas de tendencia central y los cuadros estadísticos tengan un significado claro.

Objetivos

- Que el alumno sea capaz de recopilar, organizar, analizar y graficar la información para su posterior interpretación.
- Que los estudiantes se apropien de técnicas, nociones y estrategias como herramientas para organizar y analizar la información.
- Que los estudiantes asuman una actitud crítica ante la información estadística. Que analicen el alcance de esta información en términos de lo que es real y lo que es probable.

Contenidos temáticos

- Tasas e índices.
- Elaboración e interpretación de gráficas de frecuencias absolutas y relativas (tablas, histogramas, poligonales, circulares, etc.).
- Medidas de tendencia central (media, mediana y moda).
- Medidas de dispersión (desviación media, estándar y varianza).

Actividades de aprendizaje

1. Una fuente importante para obtener información son los medios de difusión. Reportes, noticias en periódico, radio o televisión, pueden ser utilizados como “información viva” sobre la cual diseñar actividades de aprendizaje. Es conveniente que esos materiales sean del interés de los estudiantes.
2. Comparar las diferentes maneras utilizadas para presentar la información acerca de un mismo asunto. Discutir acerca de las ventajas y desventajas de cada una de ellas.
3. Comentar el valor de síntesis que tienen los indicadores denominados “tasas o índices”, como tasa de mortalidad, densidad de población, crecimiento de población, etc.

4. Utilizando la calculadora, calcular a partir de información dada, diferentes tasas o índices, interpretando lo que éstos significan.
5. Discutir acerca de las diferentes formas gráficas que se utilizan para describir un conjunto de datos. Establezca sus ventajas, desventajas y diferencias.
6. Elaborar tablas y gráficas de manera que sinteticen la información y, a la vez, muestren rasgos que permitan reconstruir con una buena aproximación la situación que la generó.
7. Utilizando la computadora (paquetes como Excel, Statgrafic y otros), elaborar diferentes gráficos, con la modificación de los datos e interpretando los resultados.
8. Discutir acerca de lo que una gráfica puede aportar con respecto a la variabilidad, tendencias y distribución de los datos.
9. Utilizando la calculadora o la computadora, determinar las medidas de tendencia central y de dispersión de los datos.
10. Comparar en diferentes situaciones, lo que representa la media, la moda o la mediana, discutiendo cuál podría ser el mejor indicador de la tendencia central.
11. Discutir el papel que juega la determinación de las desviaciones media o estándar, en la representatividad de las medidas de tendencia central.

Lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado

Tiempo sugerido: 25 horas.

Presentación

En esta Unidad se inicia el estudio más sistemático del álgebra, que se profundizará en Matemáticas II. Contempla la familiarización con el lenguaje algebraico, a partir de la visualización de las propiedades generales de los números y sus operaciones de suma y producto. Se pone el énfasis en la traducción de problemas planteados en el lenguaje verbal al lenguaje simbólico del álgebra, y en la solución de esos problemas, por lo que se propone trabajar la operatividad con expresiones algebraicas sencillas y no detenerse demasiado en esta actividad. También se considera ir abordando la noción de función y manejo de fórmulas.

Objetivos

- Desarrollar la destreza para operar símbolos algebraicos, conocer las reglas de aplicación de los paréntesis, la jerarquía de las operaciones de suma, producto, etc., el manejo del símbolo «-», en el cálculo ya sea manual o con calculadora.
- Relacionar dos magnitudes cuya variación sea interdependiente y construir las tablas y gráficas que muestren la forma de esa interdependencia.
- Traducir planteamientos en prosa al lenguaje algebraico y resolver ecuaciones de primer grado.

Contenidos temáticos

- Lenguaje algebraico.
- Operaciones con polinomios (suma, resta, multiplicación y división).
- Signos de agrupación.
- Valor numérico y despejes de fórmulas
- Noción de función. Tabulación y graficación. El plano cartesiano.
- Progresiones aritméticas y geométricas
- Resolución de ecuaciones de la forma:
 $ax + b = c$
 $ax + b = cx + d$

con paréntesis

con coeficientes fraccionarios

Actividades de aprendizaje

1. Problemas que puedan resolverse con un planteamiento aritméticos:
 - a) Si a la cuarta parte de un número le quitamos 4, el resultado es 20. Halle el número.
 - b) Encuentre dos números consecutivos cuya suma sea 43.
 - c) Pedro tiene 28 años y su hijo 4. ¿Dentro de cuántos años, Pedro tendrá cuatro veces la edad de su hijo?

- ¿Es única la solución?
- d) Hallar dos números enteros pares consecutivos, cuya suma sea 14.
 - e) La edad de Pedro es el triple de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.
2. Problemas cuyo planteamiento implique sólo suma y resta de expresiones algebraicas, iniciar a los alumnos en el despeje de la incógnita, usando (primero) la noción de operación inversa con la idea de la balanza. Luego de un tiempo, puede pasarse a: «si está sumando, pasa restando».
 - a) En una compañía constructora trabajan Juan, Pedro y Manuel; el sueldo mensual de Juan es el doble que el de Manuel y el de Pedro es la mitad que el de Juan. Si entre los tres reciben un total de \$8 000, determinar la mensualidad de cada uno.
 - c) Ramona gastó \$10.60 dólares en estampillas de 10, 15 y 20 centavos, comprando un total de 52. Si la cantidad de estampillas de 25 centavos es el cuádruple de las de 10 centavos. ¿Cuántas estampillas de cada clase compró?
 3. Introducir las leyes de los signos y reducir expresiones algebraicas con signos de agrupación. Hacer varios ejercicios.
 4. Definir lo que es el plano cartesiano y hacer ejercicios de: localización de puntos; puntos que al unirse determinan figuras geométricas y dando figuras geométricas que determinen los vértices cuya unión las describa.
 5. Recordando algún ejercicio adecuado de “variación proporcional”, tabularlo y graficarlo llegando a la noción de función. Hacer ejercicios varios sin olvidar tablas y gráficas.
 5. Llevar a los alumnos a que las ecuaciones que ya habían resuelto ($c=ax+b$), se pueden ver como funciones; que la solución, es el caso particular cuando en $y=ax+b$, $y=c$.
 6. Como consecuencia de la actividad anterior, resolver otros problemas; plantear la ecuación respectiva y llevarla a la forma: $ax+b=0$; hacer tabla y gráfica de $y=ax+b$ y comprobar que donde la recta cruza al eje X, cuando $y=0$, allí está la solución de la ecuación.
 8. Tomar fórmulas sencillas de la física y hacer ejercicios de despeje.
 9. A partir de las gráficas de $y=x-2$ y $y=x+1$ intentar construir la gráfica de $y=(x-2)(x+1)$.
 10. Hacer suficientes ejercicios de multiplicaciones de binomios (en una sola variable).
 11. Con base en la noción de potencia y multiplicación, seleccionar polinomios en una variable, de grado 3 como máximo; transformarlos con la ley de la cebolla y, con ayuda de la calculadora, tabular y graficar. Ejemplo de la ley de la cebolla o anidación de paréntesis: $y = x^3+3x^2-2x+7 = x(x^2+3x-2)+7 = x(x(x+3)-2)+7$.
 12. Explicando el significado de «valor numérico de una expresión», para polinomios ordenados de primero, segundo y tercer grado, con la ley de la cebolla y sin ella, usando calculadora (algunos a mano) hacer la evaluación, localizar el punto en el plano cartesiano y decir a quién pertenece (a una recta, a una parábola o en general a una curva):
 - a) $y=x+1$; si $x=3$ entonces $y=4$. El punto (3,4) pertenece a una recta.
 - b) $y=x^2-3x-1$; si $x=2$ entonces $y=-3$. El punto (2, -3) pertenece a una parábola.
 12. Si el tiempo lo permite, se pueden ejercitar las operaciones con cualquier tipo de polinomios.

Bibliografía

- ANAYA Debernard, Salvador. *Carrusel Matemático*. México: Editorial Limusa Noriega, 1990.
- BATANERO, Carmen, *et al.* «Razonamiento Combinatorio en alumnos de secundaria». *Educación Matemática*, Vol. 8, Núm. 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica, abril 1996, pp. 26-38.
- BRITTON, Jack e Ignacio Bello, *Matemáticas Contemporáneas*. México: Harla, 1982, 2a. edición.
- CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la Matemática Moderna*, México: Trillas, 9a. reimpre-
sión. REYES, Araceli, *Sistemas numéricos I*. México: Grupo Noriega Editores, 1993, Caps. 3, 4 y 5.
- FLORES Peñafiel, Alfinio. «La Criba de Eratóstenes. Una Conjetura y una Prueba». *Educa-
ción Matemática*. Vol.5, Núm. 1. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1993.
- FLORES Peñafiel, Alfinio. «Nexos en el razonamiento proporcional. Palancas, media arit-
mética, promedio ponderado, mezclas, porcentajes de bateo y velocidades». *Educa-
ción Matemática*, Vol.7, Núm.2, agosto 1995. México: Grupo Editorial Iberoamérica,
pp.113-125.
- GRIMALDI, Ralph. *Matemáticas discreta y combinatoria*. México: Addison-Wesley Ibero-
americana, 1989.
- KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. 1a. edición español,
México, Fondo de Cultura Económica, 1992.
- MEYER, Paul, *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. EUA: Addison-Wesley Iberoameri-
cana, edición revisada.
- PERELMAN, Y *Matemáticas recreativa 1*. México: Ediciones Martínez Roca S.A., 1991.
- PONCE, Rosa; RIVERA, Humberto. *Aritmética y pre-álgebra*. México: Editorial Mc Graw
Hill, 1998, segunda edición.
- REYES, Araceli, *Sistemas numéricos I*. México: Grupo Noriega Editores, 1993, Caps. 3, 4 y
5.
- TAHAN, Malba. *El hombre que calculaba*. México: Noriega Editores, 1992.
- VALIENTE, Santiago. *Algo acerca de los números lo curioso y lo divertido*. México: Alham-
bra Mexicana, 1989, 1a edición.
- WAGEMANN, Ernst, *El número detective*, México, Breviarios 136, Fondo de Cultura Eco-
nómica, 1988.
- WENZELBURGER, Elfride. *Calculadora Electrónica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica,
1993.

Matemáticas II

Academia de:	Matemáticas II
Departamento de:	Ciencias formales
Semestre en el que se cursa:	segundo
Carga horaria semanal:	4 horas
Distribución de la carga horaria semanal:	sesiones de dos horas
Carga horaria semestral:	68, horas
Periodo de elaboración:	abril a julio de 1993
Periodo de modificación:	julio -septiembre de 1998.

Presentación

Los temas centrales de este curso son Álgebra, Probabilidad y Estadística. El potencial de problemas de la vida cotidiana y de las ramas de las ciencias naturales y sociales, que por medio de las técnicas algebraicas se pueden modelar y resolver es ilimitado; además, el contacto de los estudiantes con el lenguaje simbólico les ayuda a desarrollar y madurar formas de razonamiento, lo que ha motivado que, desde la creación de los primeros centros educativos que difundieron los conocimientos matemáticos, el álgebra haya estado presente como parte fundamental de la cultura científica, y en nuestro entorno educativo sea considerada como uno de los principales tópicos matemáticos a traer en el Bachillerato.

La presente reformulación se refleja en el hecho de que se omite lo que aparecía como Unidad 1,

«Ecuaciones lineales», porque ésta se trabaja en el curso de Matemáticas 1 y se le dedica un tiempo considerable, dejando así más tiempo para las demás unidades. Otra modificación es en la unidad dedicada a probabilidad y estadística, donde se simplifican los contenidos adecuándolos al tiempo disponible. Por último, se redistribuye el tiempo dedicado a cada Unidad.

El programa sea dividido en cinco unidades:

1. Sistema de ecuaciones lineales.
2. Ecuaciones cuadráticas.
3. Funciones.
4. Probabilidad y estadística.
5. Temas selectos de álgebra.

El hecho de que en las unidades 1 y 2 no aparecen explícitamente como antecedentes la manipulación y los procedimientos algebraicos, como: operaciones, productos notables y factorización, es porque se considera que estas habilidades se deben desarrollar paralelamente con el planteamiento y resolución de problemas.

Objetivos

- Se pretende que, a partir de la experiencia aritmética, se descubran patrones y relaciones, y que se expresen en forma simbólica por medio de álgebra.
- Profundizar en el concepto y las operaciones con los diferentes tipos de números para la solución de problemas en diversos contextos algebraicos.
- Utilizar el lenguaje simbólico de álgebra, en el planteo y solución de problemas que involucren ecuaciones de primero y segundo grados y sistemas de ecuaciones lineales.
- Asimilar el concepto de función, para relacionar la dependencia entre dos variables, por medio de expresiones algebraicas.
- Representar e interpretar gráficamente las soluciones de los diferentes tipos de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones.
- Construir modelos matemáticos elementales a partir de procesos inductivos, determinando los conceptos involucrados en diferentes contextos como el aritmético, geométrico, algebraico, probabilístico, estadístico, etc.

- Iniciar el estudio de algunos temas de álgebra superior, como son ecuaciones polinomiales, desigualdades, sistemas no lineales y álgebra de matrices.

Orientaciones metodológicas

Se propone que el tiempo que se emplea para desarrollar exclusivamente las destrezas operativas se fusione con el utilizado en el desarrollo de los contenidos. Al proponer problemas en el lenguaje común se pueden observar las estrategias de resolución que emprenden los alumnos, las dificultades que van encontrando y las tácticas que emplean para salvarlas. El poseer habilidades para simplificar y operar las expresiones hace más expedito el proceso para resolver una ecuación; pero es hasta este momento cuando el estudiante encuentra la razón del desarrollo de esas habilidades.

Sistemas de ecuaciones lineales

Tiempo propuesto: 16 horas.

Presentación

El núcleo de esta Unidad son los sistemas de ecuaciones lineales y su solución. Por medio de diferentes métodos, por lo que se puede vincular con Matemáticas IV, Química II y concebir esta Unidad como una breve introducción al álgebra lineal, que es utilizada en diversas ciencias como: biología, economía y física.

Objetivos

- Resolver sistemas de ecuaciones lineales de orden $m \times n$; dominar los diferentes métodos de solución.
- Resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales en diferentes contextos, como el de la química, física, economía, y poder interpretar el conjunto solución.
- Interpretar en el plano coordenado la representación de las ecuaciones lineales y sus soluciones y determinar regiones definidas por desigualdades lineales.

Contenidos temáticos

- Sistemas lineales 2×2 , 2×3 , 3×3 , 3×2 , $m \times n$.
- Métodos de solución: sustitución, igualación, suma y resta, método de eliminaciones sucesivas (eliminación gaussiana) y determinantes.
- Interpretación geométrica de las soluciones: puntos, rectas y planos, en el plano o en el espacio.
- Sistemas de desigualdades lineales.

Actividades de aprendizaje

1. Plantear problemas como:
 - a) Tengo \$1.85 en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total poseo 22 monedas, ¿cuántas son de 10 centavos y cuántas de 5 centavos?
 - b) El costo de entrada a un espectáculo varía de hombre a mujer en razón 3 a 5. Asistieron 87 hombres y 36 mujeres, y se recaudaron \$2987.00. ¿Cuánto cuesta la entrada para hombres, y cuánto para mujeres?
 - c) Si a los dos términos de una fracción se añade 1, el valor de la fracción es $\frac{2}{3}$, y si a los dos términos se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Hallar la fracción.
 - d) Si Juan le da a Pedro \$1, ambos tienen lo mismo, y si Pedro le da a Juan \$1, Juan tendrá el triple de lo de Pedro. ¿Cuánto tiene cada uno?
2. Interpretar gráficamente la solución de un sistema de 2×2 . Analizar lo que ocurre con las soluciones, si una de las ecuaciones es multiplicada por k .
3. Analizar las características algebraicas del sistema de ecuaciones si las gráficas son:
 - a) rectas no paralelas,

- b) rectas paralelas,
- c) misma recta.

Mostrar ejemplos de sistemas de ecuaciones consistentes e inconsistentes, y en el caso de ser consistentes, ver si son determinados o indeterminados.

4. Introducir los sistemas de desigualdades lineales a través de un problema de optimización, interpretar el significado de cada desigualdad como subconjunto del plano coordenado, y resolver usando la interpretación geométrica.

- a) La producción mensual de una planta de alambre de cobre es de diez toneladas, dos compañías, C_1 y C_2 requieren juntar por lo menos 5 toneladas de alambre de cobre al mes. El costo de envío por cada tonelada es de \$500 para C_1 y de \$600 para C_2 . Encuentre la manera de enviar el alambre de manera que el costo sea mínimo.
- b) Se preparan dos alimentos A y B, para una cena. El alimento A tiene 3 unidades de proteína, 2 de colesterol y 1 unidad calórica por gramo. El alimento B tiene 2 unidades de proteína, 1 de colesterol y 1 unidad calórica por gramo. Se desea que la ración de comida tenga, por lo menos, 19 unidades de proteína, no más de 11 unidades de colesterol y no más de 7 unidades calóricas. El gramo de alimento A cuesta \$0.55 y el de B, \$0.45. ¿Cuántos gramos de cada alimento se deben servir para minimizar el costo de la ración.?

Los métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales de sustitución, de igualación y de suma-resta son eficientes solo para sistemas de dos y, a veces, tres ecuaciones, pero en situaciones con mayor número de ecuaciones resultan más difíciles de utilizar y es cuando los métodos de eliminaciones sucesivas y determinantes muestran su valor, puesto que se pueden aplicar sin importar el número de ecuaciones.

Unidad 2

Ecuaciones cuadráticas

Tiempo sugerido: 16 horas.

Presentación

El tema de esta unidad es el enlace para llegar a los planteamientos más generales de la teoría de ecuaciones algebraicas, permite desarrollar las operaciones de potenciación y radicación, y se introduce la discusión sobre la naturaleza y significado de los números, pues de las soluciones de las ecuaciones cuadráticas surgen números irracionales y complejos. Otro aspecto importante es que se incrementa el campo de problemas donde podemos aplicar el álgebra; por ejemplo, en Matemáticas III y IV, así como las materias de Física.

Objetivos

- Plantear ecuaciones cuadráticas a partir de un enunciado en prosa.
- Resolver ecuaciones cuadráticas.
- Interpretar los conjuntos solución de ecuaciones y desigualdades cuadráticas en la recta numérica, con la ayuda del plano cartesiano.
- Resolver desigualdades cuadráticas.

Contenidos temáticos

- Aritmética de radicales.
- Productos notables y factorización.
- Métodos de solución para las ecuaciones de segundo grado:
- Factorización, completar el trinomio cuadrado perfecto, fórmula general, relación entre el discriminante y el número de soluciones.
- Interpretación geométrica de las soluciones.
- Desigualdades de segundo grado.

Actividades de aprendizaje

1. Hacer ejercicios de aritmética con radicales, simplifique:
a) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$; b) $5\sqrt{32} + 2\sqrt{50}$; c) $4\sqrt{28} - 6\sqrt{3} - 7$
2. Resolver problemas que involucren productos notables y factorización:
a) Las personas que asistieron a una reunión se estrecharon la mano. Una de ellas advirtió que los apretones de mano fueron 66, ¿cuántas personas concurren a la reunión?
b) Hallar tres números consecutivos en los que el cuadrado del número del medio sea mayor en una unidad que el producto de los dos restantes.
3. Hacer ejercicios de productos notables (binomio al cuadrado, binomios conjugados, binomios con término común, etc.) y factorización (factor común, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, etc.)
4. a) Encontrar la fórmula general de la solución de la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, completando el cuadrado. Resolver algunos ejemplos y analizar el tipo de soluciones que se obtienen.

- b) Analizar la naturaleza de las soluciones en función del discriminante.
5. Encontrar la ecuación de segundo grado dadas las raíces. Estudiar las fórmulas de Vieta:
- $$x_1 + x_2 = -B/A$$
- $$x_1 x_2 = C/A$$
6. Resolver problemas como:
- La suma de dos números reales es 40 y su producto es 76, encontrar los números.
 - Se desea cercar un área rectangular de 400 m^2 , de tal manera que uno de los lados tenga 10 metros menos de longitud que el otro. Calcular las dimensiones y determinar la cantidad de material que se requiere.
 - Un número real es tal que $2/3$ del mismo multiplicado por su mitad es igual a 3 ¿cuál es ese, número?
 - Si cada lado de un cuadrado se incrementa en 1.5 m, el área se incrementa en 25 m^2 . Calcular el lado del cuadrado.
7. Interpretar geoméricamente las soluciones de una ecuación cuadrática $Ax^2 + Bx + C = 0$, observando las raíces de la función $y = Ax^2 + Bx + C$. Estudiar los casos en que hay dos soluciones reales, una o ninguna, que es cuando la parábola corta el eje de las x , es tangente o no lo corta, respectivamente. Analizar los cambios en las soluciones que originan los cambios de los valores de A, B o C.

Unidad 3

Funciones

Tiempo sugerido: 16 horas.

Presentación

En esta Unidad, los ejercicios exigen un esfuerzo mayor de los alumnos en el estricto trabajo matemático; las destrezas para la inducción y deducción entran en juego para reconocer intuitivamente patrones de comportamiento y traducirlos a fórmulas. Posteriormente, el trabajo se simplifica al establecer el concepto de función y trabajando la graficación de funciones. Esta Unidad es antecedente cognoscitivo para Matemáticas IV, Taller de Estrategias para la Resolución de problemas e Introducción al Cálculo.

Objetivos

- Conocer los conceptos que involucra la definición de función, y el papel de ésta en la elaboración de modelos.
- Representar y analizar relaciones dadas por tablas, reglas verbales y gráficas.
- Conocer y hacer gráficas de funciones de distintos tipos, así como mostrar la variedad de situaciones que pueden ser representadas por un solo tipo de función.
- Saber modificar la gráfica, si se modifican los parámetros de su expresión algebraica.

Contenidos temáticos

- Análisis de tablas de variación.
- Uso de fórmulas y despeje de sus términos.
- Gráficas de funciones:
 - la recta como función lineal,
 - la parábola como función cuadrática,
 - la hipérbola como función $y=1/x$, y otras funciones racionales,
 - las funciones exponencial, logaritmo y trigonométricas.

Actividades de aprendizaje

1. A partir de tablas que relacionan valores numéricos, intentar deducir la regla de formación de la tabla, probar la bondad de la regla encontrada interpolando y extrapolar diversos casos.
 - a) Para las siguientes tablas encuentre los valores que deben ocupar las casillas vacías:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	u	$g(u)$	x	$f(x)$
0	1	-3	7	0.3	0.87	10	1.0
1	3	-2	5	0.4		20	1.3
2	5	-1	2	0.5	1.75	30	1.47
3		0	1	0.6		40	
4	9	1	2	0.7	2.87	100	2
5	11	2	5	0.8		200	2.3
6	13	3		0.9	4.23	300	2.47
7		4		1.0		400	
8		5	26	1.1	5.83	1000	3.0

9	6	37	1.2		2000	3.3
10	7		1.3	7.64	3000	

2. Hay problemas que generan sus propias tablas, por ejemplo, hallar la suma de los primeros quinientos números naturales, sabiendo que esta actividad permite a los alumnos búsquedas de distintos tipos, desde una construcción pictórica con rectángulos o la búsqueda directa de patrones de crecimiento de los valores, restando sucesivamente los valores encontrados.

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 \\
 1+2 &= 3 \\
 1+2+3 &= 6 \\
 1+2+3+4 &= 10 \\
 1+2+3+4+5 &= 15 \\
 \dots & \\
 1+2+\dots+500 &= ?
 \end{aligned}$$

3. Estudiar cómo cambia la gráfica de la recta $y=mx+b$ al variar el parámetro m o el parámetro b .
4. Fijar los elementos de una función, dominio, contradominio, regla de correspondencia, imagen e imagen inversa. Analizarlas con diagramas de bolas y flechas, con tablas y, finalmente, en la representación en un plano coordenado. Intentar, a partir de la gráfica, hacer una tabla, mostrar entonces el valor cualitativo de la gráfica, y su limitación en la precisión para determinar los valores sobre la gráfica misma.
5. Hacer las gráficas de funciones como: $f_1(x)=x^2$; $f_2(x)=Ax^2+Bx$; $f_3(x)=Ax^2+Bx+C$, etc. Dirigir a los alumnos a encontrar una forma intuitiva para saber cómo será la gráfica a partir de analizar la fórmula con la «regla de la cebolla», y del trazado de rectas.

Probabilidad y estadística

Tiempo sugerido: 12 horas.

Presentación

Continuamos con la formación en esta área, que inicia en el primer semestre de este plan de estudios, donde se recapitulan los elementos de probabilidad y estadística. Para este momento, los alumnos ya han madurado sus habilidades operacionales y asimilado el concepto de función y su representación gráfica. Utilizando estos elementos, se retoman los temas de probabilidad y estadística, para extenderlos en los aspectos de modelación.

Objetivos

- Conocer y aplicar el concepto de variable aleatoria discreta.
- Conocer e interpretar el concepto de función de distribución de probabilidad.

Contenidos temáticos

- Variables aleatorias
 - definición de variables aleatoria;
 - tipos de variables aleatoria: discreta, continua
- Distribución de probabilidad de una variable aleatoria
 - valor esperado de una variable aleatoria,
 - varianza de una variable aleatoria,
 - distribución de probabilidad empírica; de una variable aleatoria discreta y de una variable aleatoria continua,
 - distribución de probabilidad teórica; distribución binomial,
 - valor esperado en una distribución binomial.

Actividades de aprendizaje

Es importante plantear problemáticas que sean accesibles a los alumnos, derivadas de situaciones o vivencias de los mismos. Veamos algunos ejemplos :

1. Sea el juego de lanzamiento de 2 dados y X la suma de los puntos.
 - a) Determinar los valores para la variable aleatoria X
 - b) ¿Por qué la variable aleatoria X es discreta?
 - c) Determinar la distribución de probabilidad para la variable aleatoria
 - d) Presentar una gráfica de la distribución obtenida.
 - e) Determinar el valor esperado o esperanza de la variable aleatoria
 - f) Determinar la varianza para la variable aleatoria X .
2. Cinco pelotas numeradas, con 1, 2, 3, 4 y 5, se encuentran en una urna. Se sacan 2 pelotas al azar de las cinco y se anotan sus números. Encuentre la distribución de probabilidad para la variable aleatoria $X =$ suma de los puntos.
3. La probabilidad de que un enfermo se recupere de un padecimiento gástrico es 0.8. Supóngase que 20 personas han contraído tal afección.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que sobrevivan exactamente 14?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 10 sobrevivan?

- c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 16 sobrevivan?
 - d) ¿Se distribuye binomialmente la variable aleatoria?
4. Según los resultados oficiales de la última elección, 60% de los habitantes del municipio votaron por el PAN; un grupo de investigadores dice que eso es falso, para confirmarlo, realizan un muestreo aleatorio de los votos emitidos. Si el tamaño de la muestra es 20, de los cuales 8 son a favor del PAN; ¿será evidencia suficiente para afirmar que no votó el 60% por el PAN, sino menos?
5. Un proceso de producción opera con un porcentaje de deficiencia de 10%, los artículos los empaca en cajas de 6. ¿Cuál es la probabilidad de que en las cajas no halla ningún artículo defectuoso?, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de un artículo defectuoso?

Temas selectos de Álgebra

Tiempo sugerido: 8 horas.

Presentación

Esta Unidad contiene temas para que los estudiantes profundicen en la teoría algebraica, cada tema es opcional, el profesor deberá elegir uno o más temas según el tiempo y los intereses del grupo. Cada tema exige del estudiante mayor desarrollo en las destrezas operativas y de abstracción alcanzadas en las unidades anteriores, preparándolos para las matemáticas universitarias, donde se desarrollan el cálculo diferencial e integral y el álgebra lineal.

Objetivos

- Profundizar los conocimientos en uno o más temas del álgebra.
- Ejecutar correctamente operaciones y algoritmos más generales.
- Estudiar algunas aplicaciones de los temas seleccionados.

Contenidos temáticos

- Teoría de ecuaciones
- Sistemas de ecuaciones no lineales
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas
- Álgebra de matrices
- Sucesiones y series

Actividades de aprendizaje

Actividades para el tema Teoría de ecuaciones:

1. Para desarrollar la teoría de ecuaciones se recomienda partir del estudio gráfico de los polinomios, es importante discutir en este contexto el significado de las raíces, su acotación y aproximación. En el siguiente problema se ilustra una aplicación de un polinomio de grado mayor a dos.
 - a) Construir una caja, cortando cuadrados de las esquinas de una hoja *rectangular*, si las dimensiones de la hoja son de 25 cm por 40 cm y la longitud del lado de los cuadrados es de $x\text{ cm}$, entonces la ecuación cúbica $V = x(25 - 2x)(40 - 2x)$ describe la relación entre el volumen y la altura de la caja resultante. Con el fin de determinar el valor de x para el cual el volumen es un número específico, digamos $V = 1800\text{ cm}^3$, requerimos resolver la ecuación $x(25 - 2x)(40 - x) = 1800$.

Actividades para el tema Sistemas de ecuaciones no lineales:

Al resolver los sistemas de ecuaciones, como los que posteriormente plantearémos, el sistema inicial se reduce, mediante ciertas simplificaciones, a un sistema equivalente. Todas las soluciones pueden ser halladas por los procedimientos conocidos. En ciertos casos es necesario pasar a sistemas que tienen más soluciones que el original. En estos casos, las soluciones deben comprobarse al sustituirlas en el sistema inicial.

En problemas aislados se usan las «fórmulas de Vieta», que enlazan los coeficientes de las ecuaciones de tercer grado

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

con sus raíces x_1, x_2, x_3 y son las siguientes:

$$x_1+x_2+x_3=p, \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q, \quad x_1x_2x_3=-r$$

estas fórmulas se encuentran igualando los coeficientes de las correspondientes potencias de x en la igualdad

$$x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

A. Encuentre todas las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= 1 \\ x^2y+2xy^2+y^3 &= 2. \end{aligned}$$

B. Encuentre las soluciones reales del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^4+y^4-x^2y^2 &= 13, \\ x^2-y^2+2xy &= 1, \end{aligned}$$

que satisfacen la condición $xy \geq 0$.

Actividades para el tema Ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

1. De acuerdo con la definición de logaritmo de un número N , en base a , tendremos

$$\log_a N = X$$

En esta fórmula, N es cualquier número positivo y a , la base del logaritmo, es también un número positivo y distinto de 1.

A continuación, al resolver toda una serie de problemas, es útil conocer la fórmula para pasar de logaritmos con base a , a logaritmos con base b , y viceversa,

$$\log_a N = \log_b N / \log_b a.$$

Haciendo en la primera fórmula $N=b$, deducimos de la segunda fórmula que

$$\log_a b = 1 / \log_b a.$$

2. Resolver problemas como: los materiales traslúcidos tienen la propiedad de reducir la intensidad de la luz que pasa a través de ellos. Una hoja de 1mm de espesor de cierto material plástico, reduce la intensidad en 8% ¿Cuántas hojas de este tipo se necesitan para reducir la intensidad de un haz de luz a un máximo de 25% de su valor original?

R: Cada hoja de plástico reduce la intensidad al 92% de su valor original, de este modo $(0.92)^x = 0.25$, entonces $x \log(0.92) = \log(0.25)$ y $x = \log(0.25) / \log(0.92) = 16.62$, se necesitan 17 hojas.

Actividades para el tema Álgebra de matrices:

1. Veamos cómo a partir del siguiente ejemplo se pueden estudiar diversos contenidos relacionados con matrices y sus operaciones.

El «aprovisionamiento» de mercancías se representa mediante matrices, para poder tener una visualización más clara. También resulta conveniente en algunos casos, usar la computadora.

Los *blue-jeans* o vaqueros existen en distintas tallas y de diversas marcas. Al hacer un recuento de material en depósito, encontramos en un negocio 23 pantalones de la marca Wrangler en las siguientes tallas ($x'' = x$ pulgadas de cintura), 3 de 28", 11 de 30", 6 de 32" y 3 de 34". Para otras marcas encontramos las siguientes cantidades

MARCA	28"	30"	32"	34"
Wrangler	3	11	6	3
Levi-Strauss	5	5	4	3
Club de France	1	7	0	0
Bobos	6	2	2	2
Ball	3	0	0	3

Toda esta información puede organizarse en una matriz, para lograr que los datos salten a la vista.

- a) Completa la matriz de existencias

	W	L	CF	Bo	Ba
28"	3	5	1	6	3
30"
32"
34"

- b) ¿Cuántos pantalones de tu talla tiene el negocio?
 c) ¿En qué talla existe la mayor variedad de marcas?

El vendedor desea ampliar existencias, para ello debe considerar los siguientes puntos:

- De las marcas Wrangler y Levi-Strauss se venden aproximadamente el doble que de las otras marcas.
- Las tallas 30" y 32" se venden dos veces más rápido que 28" y 34".
- De una misma marca no quiere tener mas de 40 pantalones

- d) Haz tú mismo el pedido con base en las condiciones arriba mencionadas y escríbelo de forma matricial, llamaremos P a la matriz de pedido.
 e) Las existencias aumentaron con el pedido, encuentra la matriz de existencia actual $E_2 = E_1 + P$.
 f) En una semana se venden:

1	3	0	1	2
5	8	6	1	2
2	3	5	6	0

0 1 1 0 3

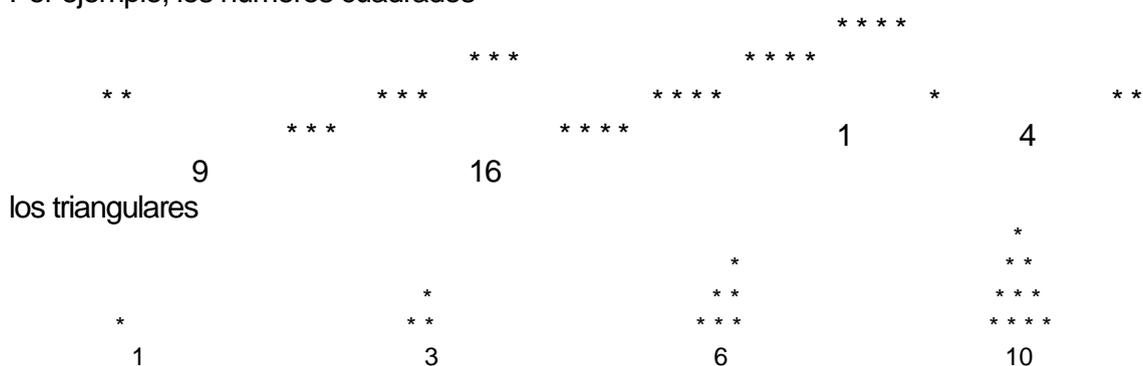
Indica en forma de matriz cuáles son las existencias al finalizar la semana ($E_3 = E_2 - V$).
¿Tiene sentido la matriz V según el pedido que tú hiciste?, en caso de que no, modifica P o V, para que puedas calcular E_3 .

Actividades para el tema Sucesiones y series

1. Números figurados.

Un número figurado es aquel que podemos representar por medio de puntos arreglados con cierto «orden geométrico» y según la figura que formen, serán triangulares, cuadrados, poligonales, piramidales, etc.

Por ejemplo, los números cuadrados



los pentagonales: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ...;
los hexagonales: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, ...;
etc.

Para cada una de las sucesiones podemos encontrar el término general del n-ésimo término, por ejemplo, la fórmula para el n-ésimo número triangular es $n(n+1)/2$; entonces, para calcular el cuarto término hacemos $4(4+1)/2=4(5)/2=20/2=10$, como se muestra en el diagrama de arriba. Para los cuadrados es n^2 , etc.

Algunos ejercicios sobre estas sucesiones son:

- Dibujar los diagramas para los números triangulares, cuadrados, pentagonales, hexagonales y heptagonales, hasta el cuarto o quinto término, de manera que quede claro cuál es el patrón de dibujo.
- En la sucesión de triangulares $T_1=1, T_2=3, T_3=6, T_4=10, T_5=15, \dots$, obtener la fórmula de T_n . Note que $T_n = 1+2+3+4+\dots+n$, es decir, la serie corresponde a la suma de la progresión aritmética 1, 2, 3, ...,n.
- Hallar los términos generales, es decir, el término n-ésimo para los números cuadrados C_n , los pentagonales P_n , los hexagonales H_n , asociados a las progresiones aritméticas
1, 3, 5, 7, 9, ...,
1, 4, 7, 10, 13, ...,
1, 5, 9, 13, 17, ..., respectivamente.
- demostrar que la fórmula del n-ésimo poligonal, cuando el polígono tiene L lados, es

$$\frac{(L-2)n^2 - (L-4)n}{2}$$

Empiece por verificar que funciona para casos particulares de los poligonales que ya encontró la fórmula, Triangulares: $L = 3$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Bibliografía

- ANGEL, Allen R. *Álgebra intermedia*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1992, 2da. edición.
- ANGEL, Allen R. *Álgebra elemental*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1992, 3a. edición
- BARNETT, Raymond. *Álgebra*. México: Mc Graw Hill, 1994 2da. edición (1a. español).
- BRITTON, Jack R. *Matemáticas contemporáneas*. México: Harla, 1979, 2a. edición.
- CHRIS, Rorres, et al. *Aplicaciones de álgebra lineal*. México: Limusa, Grupo Noriega Editores.
- CODOCEDO LOAYZA, Teresa C. *Matemáticas Dos, Álgebra. Cuaderno de trabajo*. México: McGraw Hill, 1995.
- DE OTEYZA, Elena, et al. *Álgebra*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1996, 1a. edición.
- FLORES, Alfinio. "Ida y vuelta: primero adivinar, luego probar". *Educación Matemática*, Vol. 4, No. 2. México: Grupo editorial Iberoamérica, agosto 1992, pp. 79-95.
- FREUD, J; G. Simon. *Estadística elemental*. México: Prentice Hall Hispanoamérica, 1992, 8a. edición.
- GROSSMAN, Stanley. *Aplicaciones de álgebra lineal*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.
- HUGHES-HALLET, Deborah, et al. *Cálculo*. Mexico: CECSA-Wiley, 1995, 1a. edición español.
- JOHNSON, Murphy; Arnold R. Steffenson. *Álgebra aplicada*. México: Trillas, 1993, 1a. edición.
- KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica, 1992, 1a. edición.
- National Council of Teachers of Mathematics NCTM. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, EUA, marzo 1989.
- PERELMAN, Y.I. *Álgebra recreativa* México: Ediciones de Cultura Popular, 1978.
- REES, Paul K, et al. *Álgebra*. México: Mc Graw Hill, 1992, 10a. edición.
- SMITH, Stanley A., et al. *Álgebra*. Wilmington EUA, Addison Wesley Iberoamericana, 1992. 1a. edición
- SOBEL, Max; Norbert Lerner. *Algebra*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1996, 4a. edición.
- SPIEGEL, Murray R. *Algebra superior*. México: Mc Graw Hill, 1991.
- SWOKOWSKI, Earl W. *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988, 6a edición.
- TAHAN, Malva. *El hombre que calculaba*. México: Noriega Editores, 1992 Limusa, 5a. reimpresión (1a. edición, 1986).
- USPENSKY, J. V. *Teoría de ecuaciones*. México: Limusa, 1992, 3a. Reimp. (1era edición).
- ZUCKERMAN, Martin M. *Algebra y trigonometría simplificada*. México: Limusa, 1993, 1a. edición.

Matemáticas III

Academia de:	Matemáticas III
Departamento de:	Ciencias formales
Semestre en el que se cursa:	tercero
Carga horaria semanal:	3 horas
Distribución de la carga horaria semanal:	una sesión de dos horas y otras de una hora
Carga horaria semestral:	51 horas
Periodo de elaboración:	octubre-diciembre de 1993
Periodo de modificación:	julio-septiembre de 1998

Presentación

El tema central de este curso es la geometría y en segundo término, la trigonometría.

La geometría se distingue por la claridad y la sencillez tanto en el enunciado del resultado, como en los planteamientos a partir de los cuales debe obtenerse ese resultado. De ahí que la Geometría nos brinde las mejores oportunidades para desarrollar el pensamiento lógico en la escuela.

Los conceptos de la geometría y la trigonometría se aplican en el estudio de estática y dinámica de la Física, en la estructura molecular de la Química, en la cartografía de la Geografía. Su estudio contribuye a reforzar la formación del pensamiento lógico, necesario para comprender la rigurosidad de los aspectos demostrativos y deductivos tan característicos de la geometría, continuando así con los objetivos del taller de Lógica, que se imparte en el primer semestre. Las modificaciones realizadas a este Programa consisten en la reubicación de contenidos en seis unidades en lugar de cuatro; esto es, por la necesidad que presentaban los temas de cuadriláteros, círculo y áreas de conocer y manejar elementos de congruencia de triángulos, para que al abordar dichos temas, se pudiera justificar y demostrar sus propiedades y teoremas básicos.

Los objetivos y cargas horarias se redistribuyeron ajustándolos a las nuevas unidades y se agregan objetivos en las unidades que se refieren al desarrollo de habilidades para demostrar, que solo aparecía como objetivo general. El programa está integrado por las siguientes seis unidades:

1. Polígonos.
2. Congruencia y cuadriláteros.
3. Semejanza y círculo.
4. Áreas y perímetros.
5. Trigonometría.
6. Sólidos.

Objetivos

El alumno deberá ser capaz de:

- Utilizar la regla y el compás, y los demás instrumentos del juego de geometría, para descubrir las propiedades y características de las figuras, y para hacer mediciones y transformaciones geométricas.
- Calcular distancias, ángulos, perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos, usando resultados y teoremas pertinentes de la geometría.
- Comprender y utilizar con propiedad el lenguaje de la geometría para comunicarse y operar los objetos geométricos.
- Identificar y expresar las relaciones que existen, en cuanto a forma, cantidad y ubicación, entre los elementos esenciales de uno a varios objetos geométricos.
- Resolver problemas referentes a cuestiones espaciales, tanto en ámbitos reales como en los creados específicamente para la enseñanza.
- Visualizar cuerpos geométricos en el espacio y construir sus representaciones en el plano.
- Justificar y argumentar la veracidad de sus resultados y afirmaciones geométricas, a partir de los postulados, definiciones y teoremas básicos de la geometría.

Orientaciones metodológicas

Se sugiere una introducción gradual al pensamiento deductivo, pero sin olvidar que la comprensión y el acceso a la demostración no es un objetivo fácil de lograr en la mayoría de los estudiantes y requiere de un largo periodo de preparación.

Si se considera que el álgebra constituyó el tema central del curso anterior, es importante insistir en la vinculación del álgebra con la geometría. Normalmente, en los cursos de geometría, se suele caer en esta desvinculación y la mayoría de los textos que existen la propician.

En esta asignatura, los dibujos son importantes para fijar las ideas y poderlas discutir con los alumnos, pero se debe ser cuidadoso de mostrar que sólo es un ejemplo de una situación generalizada, una conjetura, que hay que ir fortaleciendo con otros ejemplos y, en última instancia, demostrarla. Las actividades que se sugieren en las unidades representan sólo una muestra, no pretenden cubrir ni todos los contenidos ni todos los objetivos.

Polígonos

Tiempo propuesto: 8 horas.

Presentación

En esta Unidad se inicia el estudio específico de la geometría. No se trata de empezar con las definiciones de los conceptos básicos, sino que, partiendo de que los alumnos tienen cierta experiencia geométrica, ya sea que la hayan adquirido en cursos anteriores o en su contacto con el mundo físico, entrar directamente con actividades sobre polígonos, que incluyan o propicien la precisión del vocabulario básico de la geometría, y la exploración y descubrimiento de las propiedades de determinados polígonos.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Usar la regla, el compás y demás instrumentos para la reproducción y trazado de figuras geométricas.
- Construir diferentes tipos de polígonos con determinadas características.
- Utilizar las definiciones, postulados y teoremas básicos de la geometría en la resolución de problemas.

Contenidos temáticos

Queremos recalcar que el orden en que se enumeran los contenidos de todas las unidades, no necesariamente es el orden en que se estudian, sino que a partir del planteamiento de problemas y actividades adecuadas, se aborden de la manera que resulte más natural.

- Puntos, rectas y segmentos.
- Segmentos congruentes, punto medio de un segmento.
- Intersección de rectas, ángulos opuestos por el vértice.
- Rectas paralelas, perpendiculares y secantes, ángulos entre ellas.
- Mediatriz de un segmento.
- Clasificaciones diversas de ángulos: rectos, agudos, obtusos, complementarios, suplementarios y adyacentes.
- Congruencia de ángulos.
- Suma de ángulos internos y externos en un polígono.
- Bisectriz de un ángulo.
- Triángulos, clasificación, propiedades y puntos notables.
- Clasificaciones diversas de polígonos: convexos, cóncavos, regulares e irregulares.

Actividades de aprendizaje

1. Ayudarles a utilizar correctamente la regla y el compás, para el trazo de: punto medio de un segmento, bisectriz de un ángulo, mediatriz de un segmento, una recta perpendicular a una recta dada, una paralela a una recta dada, un triángulo dadas las medidas de sus tres lados.
2. Auxiliarlos en el uso correcto del transportador para medir y trazar ángulos. Así como el uso de las escuadras en el trazo de paralelas y perpendiculares.

3. Se le pide al alumno que dibuje un polígono. Utilizando los diferentes polígonos que trazaron, se precisan conceptos como punto, segmento, ángulo, vértice y su notación específica.
4. Con el mismo ejercicio se puede trabajar la clasificación de ángulos: agudos, rectos y obtusos. Así como las clasificaciones diversas de polígonos.
5. Se les pide que dibujen un triángulo y que lo recorte, que enumeren sus ángulos y que los corten. Que junten los tres ángulos que cortaron y observen que suman 180° .
6. Partiendo del ejercicio anterior, que dibujen polígonos convexos con diferente número de lados y que tracen desde un solo vértice todas las diagonales posibles, para que calculen la suma de ángulos interiores de cualquier polígono convexo.
7. Dado un polígono regular de cierto número de lados, que calculen la medida de un ángulo interno.
8. Dado la medida de un ángulo interno de un polígono regular, que calculen cuántos lados tiene el polígono.
9. Aplicar lo anterior en el trazo de medianas, mediatrices, alturas y bisectrices en un triángulo, así como el trazo del incírculo y del circuncírculo.

Congruencia y cuadriláteros

Tiempo propuesto: 9 horas.

Presentación

En esta unidad se avanza en el sentido de la formalización. El objeto de estudio continúa siendo el mismo que en el núcleo anterior; pero ahora no sólo se manejan sus elementos básicos y propiedades, sino que a partir de la postulación de los criterios de congruencia, se pretende determinar propiedades específicas de triángulos y cuadriláteros.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Precisar a partir de la noción general de congruencia de figuras y polígonos, la congruencia de triángulos.
- Aplicar criterios de congruencia en la resolución de problemas geométricos y prácticos.
- Justificar algunas construcciones con regla y compás, a partir de los criterios de congruencia.
- Demostrar, con los criterios de congruencia, propiedades de triángulos y cuadriláteros.

Contenidos temáticos

- Congruencia de triángulos y sus criterios.
- Congruencia de polígonos.
- Simetrías, traslaciones y rotaciones.
- Cuadriláteros, clasificación y propiedades.

Actividades de aprendizaje

1. Pedir a los alumnos que construyan un triángulo dados los tres lados, que comparen su triángulo con el de sus compañeros, para que concluyan que tienen la misma forma y el mismo tamaño, y enunciar el criterio LLL.
2. Pedirles que construyan un triángulo dados dos lados y el ángulo adyacente, que lo comparen y enunciar el criterio LAL.
 2. Pedirles que construyan un triángulo dados dos ángulos y el lado adyacente, que lo comparen y enunciar el criterio ALA.
4. Comenzar a demostrar teoremas, como los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes, En un triángulo a ángulos iguales se oponen lados iguales.
5. Hacer ejercicios sencillos de demostración, donde se apliquen los criterios de congruencia.
6. Hacer ejercicios de aplicación del álgebra en el cálculo de lados y ángulos en triángulos congruentes.
7. Utilizar los criterios de congruencia en la demostración de las propiedades de los cuadriláteros: los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes, los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes, los ángulos adyacentes de un para-

lelogramo son suplementarios, las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.

8. Utilizar los criterios de congruencia en la demostración de propiedades particulares de ciertos cuadriláteros: en el rectángulo, las diagonales son iguales; en el rombo, las diagonales son perpendiculares, las diagonales son bisectrices de ángulos opuestos. En el trapecio isósceles, los ángulos de la base son iguales, las diagonales son iguales.
9. Hacer ejercicios de aplicación del álgebra en el cálculo de lados y ángulos en cuadriláteros.

Semejanza y círculo

Tiempo propuesto: 9 horas.

Presentación

En este núcleo se continúa con la formalización. Se estudia el círculo y partiendo de la postulación de los criterios de semejanza se determinan más propiedades del triángulo.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Aplicar las propiedades de los ángulos en el círculo en la resolución de problemas geométricos y prácticos.
- Precisar, a partir de la noción general de semejanza de figuras y polígonos, la semejanza de triángulos.
- Aplicar los criterios de semejanza en la resolución de problemas geométricos y prácticos.

Contenidos temáticos

- El círculo, rectas tangentes, ángulos centrales e inscritos.
- Semejanza de triángulos y sus criterios.
- Semejanza de polígonos.
- Teorema de Tales en el triángulo, el Teorema de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo y el Teorema de la bisectriz de un ángulo de un triángulo.
- Trazos y construcciones de:
 - La raíz cuadrada de una magnitud.
 - Del pentágono regular con regla y compás.
 - De figuras a escala.

Actividades de aprendizaje

1. Aplicación del álgebra en el cálculo de las medidas de ángulos centrales, ángulos inscritos, arcos, ángulos formados por dos cuerdas que no se intersectan en el centro del círculo.
2. Ejercicios sencillos de demostración, aplicando los criterios de semejanza.
3. Aplicar el álgebra en el cálculo de lados y ángulos en triángulos semejantes.
4. Justificar los trazos para construir la raíz cuadrada de una magnitud.
 3. Aplicar la razón áurea en la construcción del pentágono regular con regla y compás.

Áreas y perímetros

Tiempo propuesto: 6 horas.

Presentación

Si se parte de los criterios de congruencia en los triángulos y los cuadriláteros construir el concepto de figuras equivalentes y aplicarlo en las fórmulas para calcular perímetros y áreas de otras figuras.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Construir las fórmulas para calcular áreas a partir de las propiedades de congruencia de las figuras.
- Desarrollar métodos para calcular perímetros y áreas para figuras compuestas.

Contenidos temáticos

- Perímetro y áreas: de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares, polígonos irregulares y círculo.
- Transformación de áreas.
- Media geométrica.

Actividades de aprendizaje

1. Aplicar el teorema de Pitágoras en el cálculo de perímetros de figuras trazadas en una retícula cuadrada o en el geoplano.
2. Utilizar el álgebra en problemas de cálculo de perímetros; por ejemplo: el largo de un terreno rectangular mide el triple de su ancho, y su perímetro es de 256 m. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?
3. Partiendo del área del rectángulo, deducir las fórmulas de áreas haciendo transformaciones en las figuras, por ejemplo: un paralelogramo lo pueden transformar en un rectángulo.
4. Trabajar problemas que involucren ecuaciones para el cálculo de áreas, por ejemplo: un edificio ocupa un terreno rectangular que mide de largo 30 m. menos que el doble de su ancho, el estacionamiento que rodea al edificio tiene 10 m de anchura y un área de 4600 m². ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que ocupa el edificio?

Unidad 5

Triángulos y trigonometría

Tiempo propuesto: 9 horas.

Presentación

A continuación se estudian los elementos básicos de la trigonometría, presentados como una aplicación del tema de semejanza. No se pretende un estudio exhaustivo de esta rama, la parte de trigonometría analítica y completar el estudio de las identidades trigonométricas se hará en el siguiente semestre en Matemáticas IV.

Objetivos

- El alumno será capaz de utilizar las razones trigonométricas en la resolución de problemas prácticos.

Contenidos temáticos

- Razones trigonométricas de ángulos agudos, en particular de 30° , 45° y 60° .
- Solución de triángulos rectángulos.
- Círculo trigonométrico, razones trigonométricas de ángulos mayores de 90° , en función de uno agudo.
- Uso de la calculadora para realizar razones trigonométricas de ángulos arbitrarios.
- Leyes de los senos y de los cosenos.
- Solución de triángulos oblicuángulos.

Actividades de aprendizaje

1. Inscribir un hexágono regular en el círculo unitario y utilizando el hecho de que el radio es igual al lado del hexágono, calcular (sin usar calculadora) los valores de las razones trigonométricas de ángulos de 30° y 60° .
2. Inscribir un cuadrado en el círculo unitario, para calcular (sin usar calculadora) los valores de las razones trigonométricas de ángulos de 45° .
3. Hacer la generalización de las razones trigonométricas a funciones trigonométricas en el círculo unitario.
4. Utilizar el círculo unitario para calcular las razones trigonométricas de los ángulos: 0° , 90° , 180° y 270° .

Unidad 6

Sólidos

Tiempo propuesto: 7 horas.

Presentación

Los cuerpos sólidos constituyen la entrada al espacio tridimensional y pueden tomarse como ejemplos y ejercicios de generalización de algunos resultados desarrollados en el plano, que cuando sea pertinente, se recomienda plantear a la par. Por ejemplo, se puede localizar el gravicentro o centro de gravedad de un triángulo y luego dejar planteado dónde se ubicaría el de un tetraedro. Esta última unidad se propone entonces para estudiar específicamente algunas cuestiones sobre los sólidos, y revisar con cierto detenimiento los resultados que quedaron planteados como generalización al espacio en las unidades anteriores.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Clasificar los sólidos geométricos por su forma.
- Resolver problemas de la geometría espacial.

Contenidos temáticos

- Caras, aristas y vértices de prismas, pirámides y poliedros regulares.
- Altura, base, área superficial y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos y sólidos compuestos.
- Desarrollos planos de los poliedros regulares, prismas, pirámides, cilindros y conos.
- Representaciones planas de cubos, prismas, pirámides y otros sólidos.
- La esfera, su superficie y volumen.

Actividades de aprendizaje

1. Construir los poliedros regulares a partir de su desarrollo plano.
2. Construir figuras tridimensionales con hilo y popotes, como el tetrahedro, el cubo, etcétera. Discutir sus propiedades.

Bibliografía

- CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la Matemática Moderna*. México: Editorial Trillas, 1985.
- CLEMENS, Stanley; O'Daffer, Phares; Cooney, Tomas. *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. México: Addison–Wesley Iberoamericana, 1989.
- FILLOY Yague, Eugenio. *Didáctica e historia de la Geometría Euclidiana*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, 1998.
- FUENLABRADA De la Vega Trucíos, Samuel. *Matemáticas II Geometría y Trigonometría*. México: Mc Graw- Hill, 1994.
- GUILLEN Soler, Gregoria. *Poliedros*. España: Editorial Síntesis, 1991.
- HEMMERLING, Edwin. *Geometría elemental*. México: Limusa, 1992.
- KLINE, Morris. *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*. México: FCE, 1992.
- MORFÍN Heras, María del Pilar. *Matemáticas III Geometría, Cuaderno de Trabajo*. México: Mc Graw- Hill, 1994.
- RICH, Barnett. *Geometría*. México: Serie Schaum, Mc Graw-Hill, México, 2a. ed., 1994.
- VELASCO Sotomayor, Gabriel. *Tratado de Geometría*. México: Editorial Limusa, 1983.
- WENWORTH, Jorge; Smith, David Eugenio. *Geometría plana y del espacio*. México: Editorial Porrúa, 1984.

Matemáticas IV

Academia de:	Matemáticas IV
Departamento de:	Ciencias formales
Semestre en el que se cursa:	cuarto
Carga horaria semanal:	3 horas
Distribución de la carga horaria semanal:	una sesión de dos horas y una de 1 hora
Carga horaria semestral:	51 horas
Periodo de elaboración:	junio-octubre de 1993
Periodo de modificación:	julio-agosto 1998

Presentación

Con la Geometría analítica como núcleo temático de la asignatura Matemáticas IV del Bachillerato General, se le ofrece al alumno una oportunidad de auténtica integración de todos los conocimientos matemáticos recibidos como antecedentes a este curso; además, se le proporcionan los elementos necesarios que le permiten su aplicación, tanto en asignaturas de otras áreas como en cursos subsecuentes de Matemáticas.

En este contexto, la Geometría analítica es una herramienta eficaz para describir y modelar la trayectoria de cuerpos en movimiento, sistemas de fuerzas, crecimiento de poblaciones, las formas de los seres vivos, la estructura de la materia y también los fenómenos económicos, entre otros, por lo que resulta ser de gran apoyo para el estudio de asignaturas como Física, Química, Economía, Geografía, Educación ambiental y Biología. Además, este curso se considera propedéutico para Introducción al Cálculo, la asignatura optativa de esta área en 6º semestre.

El punto de partida de este curso está en los problemas de la geometría euclidiana, que usa el método axiomático clásico de Euclides o método sintético, los cuáles ahora serán abordados con otro método, pues la geometría analítica introduce coordenadas numéricas y el manejo del lenguaje algebraico. Este método analítico o de coordenadas sustituye puntos del plano por pares de números, curvas por ecuaciones de dos variables, el estudio de las curvas y proposiciones geométricas por el estudio de las propiedades algebraicas y analíticas de las ecuaciones, la demostración de un teorema geométrico por la demostración del teorema correspondiente del álgebra o del análisis.

En síntesis, la Geometría analítica ofrece:

- La posibilidad de asociar expresiones algebraicas a figuras geométricas.
- La posibilidad de descubrir resultados geométricos a partir de los algebraicos.
- La posibilidad de establecer con una sola fórmula, propiedades generales de familias enteras de curvas.
- Medios generales y uniformes para proceder a la solución de los problemas que se presentan al investigar las propiedades de las figuras; se obtienen resultados cuya generalidad no está limitada al estado particular de la figura que se considere.

Esta modificación al Programa contempló cambios en la secuencia de las unidades con la intención de facilitar el proceso de aprendizaje en los alumnos, ubicando la unidad de coordenadas polares al final del curso, como Unidad 4 y las unidades 1,2 y 3 se centraron en la adquisición de conocimientos y destrezas propios de la geometría analítica, trabajando en el sistema de coordenadas rectangulares.

Igualmente, se ajustaron contenidos y cargas horarias con base en el diagnóstico de las posibilidades de la práctica docente en el aula. Para cumplir con estos propósitos, el Programa está integrado por las siguientes cuatro unidades temáticas:

1. Sistemas de coordenadas para el plano y el espacio.
2. Líneas rectas y circunferencias.
3. Cónicas.
4. Sistema de coordenadas polares y trigonometría.

Objetivos

- Traducir las representaciones geométricas a representaciones en coordenadas.
- Deducir propiedades geométricas a partir de un resultado algebraico.
- Resolver problemas geométricos, usando el método analítico o de coordenadas.
- Desarrollar una concepción geométrica dinámica.
- Ejercitar la imaginación espacial.

Orientaciones metodológicas

Las actividades a través de las que se accede al conocimiento de la geometría analítica implican el manejo de figuras geométricas y sus propiedades, estudiadas en Matemáticas III, y la manipulación algebraica, núcleo de Matemáticas I y II. En este curso se integran y afianzan estas destrezas, a través de ejercicios y problemas, con el cuidado que el énfasis esté en dar al conocimiento geométrico una concepción dinámica por medio del álgebra y no supeditar los procedimientos de solución a complejas rutinas algebraicas. Además, se recomienda, en las unidades que lo permitan, ampliar los conceptos adquiridos para el plano cartesiano hacia el espacio y relacionarlos con situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, el espacio delimitado por los muros del salón de clases, en donde se pueden visualizar fácilmente el origen y los ejes de un sistema de coordenadas.

Sistemas de coordenadas para el plano y el espacio

Tiempo: 16 horas

Presentación

En esta Unidad se introduce el uso de las coordenadas para determinar numéricamente la posición de un punto cualesquiera en una recta, el plano o el espacio, lo que posibilita representar numéricamente diversos tipos de figuras geométricas, así como la investigación de relaciones entre ellas.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Utilizar el sistema de coordenadas rectangulares para representar figuras en la recta, el plano y el espacio.
- Traducir las relaciones geométricas que definen a un lugar geométrico a su representación algebraica, y viceversa; es decir, a partir de la representación algebraica identificar el lugar geométrico.

Contenidos temáticos

- Sistema de coordenadas rectangulares.
- Coordenadas de un punto.
- Distancia entre dos puntos.
- Estudio de lugares geométricos a partir de coordenadas.
- Estudio de simetría de las figuras.
- División de un segmento en una razón dada.

Los temas de cada uno de estos incisos serán desarrollado para la recta, el plano y el espacio.

Actividades de aprendizaje

Representaciones en una recta

1. Comenzar con la localización de puntos en la recta numérica, determinar el punto medio de dos puntos y encontrar el conjunto de puntos que satisfagan ciertas condiciones dadas, por ejemplo:
 - Señale en el eje numérico todos los puntos x , para los cuales se cumple:
a) $x < 2$; b) $x - 3 < 5$; c) $2 < x < 5$.
2. Para distancia entre dos puntos, se debe presentar el valor absoluto de un número, dado que esto permite entender la distancia entre dos puntos, cualesquiera que sean sus ubicaciones en la línea recta.

3. Para la división de un segmento en una razón dada se sugieren ejercicios como:

- En la recta numérica se dan los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ encuentre la coordenada del punto medio del segmento AB.
- Hallar la coordenada del punto que está situado en la recta numérica de tal modo que su distancia al punto A(2) es el doble de su distancia al punto B(7)

Representaciones en el plano

4. Después de dar una explicación general respecto del sistema de referencia de coordenadas rectangulares, el alumno deberá ubicar puntos en diferentes cuadrantes y dado un punto cualesquiera con sus dos coordenadas (x, y) , sin graficar, deberá identificar a qué cuadrante pertenece. En esta parte se aprovecha para presentar a los alumnos la simetría de puntos y segmentos, con respecto a los ejes y al origen.
5. Una generalización de todo lo anterior conduce a la comprensión de la generación de lugares geométricos con representación algebraica. Relaciones entre las coordenadas que determinan un conjunto de puntos o lugar geométrico, se pueden ejercitar por medio de:

Determinar en qué cuadrante puede estar situado el punto $M(x, y)$, si:

a) $xy > 0$, b) $xy < 0$, c) $x - y > 0$, d) $x + y = 0$, etc.

4. Para inducir a los alumnos a encontrar la fórmula general de distancia entre dos puntos $d(A,B) = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2}$, se puede recurrir al teorema de Pitágoras y ejercitar con:
- Dados dos vértices adyacentes de un cuadrado A(2, -1) y B (-1, 3) determinar los otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones hay?
 - Demostrar que los puntos A(2, 2), B(-1, 6), C(-5,3) y D(-2, -1) son vértices de un cuadrado.
7. En relación con la división de un segmento en una razón dada, se recomienda plantear la semejanza de triángulos la cual nos lleva a la ecuación: $r = (x-x_1)/(x_2 - x_1)$, y ejercicios como:
- Los extremos de un varilla homogénea son A(3, -1) y B(-1, 1). Determinar las coordenadas del centro de gravedad.
 - Dados dos puntos A(3, -1) y (2, 1), determinar:
 - las coordenadas del punto M simétrico al punto A con respecto al punto B
 - las coordenadas del punto N simétrico al punto B con respecto al punto A

Representaciones en el espacio

8. Para ampliar estos conocimientos del plano al espacio se trabajará con coordenadas rectangulares en el espacio, en este caso tres ejes (x, y, z) , lo cual se visualiza fácilmente si se construye un cubo de cartulina lo que permite revisar, además de los tres ejes, los planos coordenados que se generan con dos ejes cualesquiera.

- Tomemos ocho puntos $(1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,1,-1), (-1,-1,1), (-1,-1,-1)$.
 - ¿Cuál es el punto más alejado del punto $(1,1,1)$? Calcule la distancia entre estos dos puntos.
 - ¿Cuáles son los puntos más próximos al punto $(1,1,1)$?
 - ¿Cuál es la distancia entre estos puntos y el punto $(1,1,1)$?

- Dibuje un cubo. Dirija los ejes de coordenadas en la dirección de las tres aristas que parten de un mismo vértice. Tome por unidad de medida la arista del cubo. Designe los vértices del cubo con las letras $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$.
 - Encontrar las coordenadas de todos los vértices del cubo.
 - Hallar las coordenadas del punto medio de la arista CC_1 .

- Ubicar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales de la cara AA_1B_1B .
 - Deduzca la fórmula de la distancia entre puntos del espacio. (La deducción es similar a la correspondiente en el plano.)
 - Hallar el centro de una esfera de radio $R=3$, que es tangente a los tres planos coordenados y está situada en el séptimo octante.

Unidad 2

Líneas rectas y circunferencias

Tiempo propuesto: 12 horas.

Presentación

En la Unidad 2 se abordarán problemas que sean resolubles mediante el uso de la línea recta y la circunferencia, permitiendo reforzar y ampliar el estudio de sus propiedades y relaciones como entes geométricos, a través del uso del método de coordenadas. La determinación de sus ecuaciones y el análisis de sus parámetros posibilita la integración del trabajo algebraico y el geométrico en la resolución de problemas.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Analizar las condiciones que deben cumplir los puntos, para pertenecer a una línea recta.
- Deducir la ecuación de la recta.
- Explicitar los parámetros que determinan una línea recta y cómo, a partir de ellos, se puede presentar a la ecuación de la recta de formas distintas.
- Examinar las condiciones que deben cumplir los puntos para pertenecer a una circunferencia.
- Deducir la ecuación de la circunferencia.
- Explicitar los parámetros que determinan una circunferencia y cómo, a partir de ellos, la ecuación de la misma se puede representar de diferentes formas.
- Aplicar los conceptos de recta y circunferencia en la resolución de problemas.

Contenidos temáticos

- Ángulo de inclinación y pendiente de la línea recta.
- Ecuación de la recta.
- Familias de rectas.
- Condiciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas.
- Ángulo entre dos rectas.
- Distancia de un punto a una recta.
- Parámetros de la circunferencia.
- Ecuación de la circunferencia.
- Familias de circunferencias.
- Ecuación de la recta tangente a la circunferencia

Actividades de aprendizaje

Línea recta

1. En primer lugar, los alumnos deben familiarizarse con el concepto de ángulo de inclinación, por medio de trazar varias rectas y midiendo respectivamente cada uno de sus ángulos; luego, deben trazar rectas con el mismo ángulo de inclinación, que pasan por un punto dado, un punto y un ángulo de inclinación dados, que pasan por dos puntos. Estos trazos tienen la finalidad que el alumno asimile bajo qué condicio-

nes (datos) se forman familias de rectas y bajo qué condiciones se obtiene una sola recta. Estos ejercicios deben contemplar líneas rectas horizontales, verticales, inclinadas, paralelas y perpendiculares; analizando las características de su ángulo de inclinación y estableciendo su relación con el concepto de pendiente (positiva o negativa) se sugiere para la organización de los datos provenientes de estos ejercicios, construir un cuadro con el siguiente encabezado: ángulo, tipo de ángulo (agudo, obtuso) y pendiente (positiva o negativa).

2. Se continúa con la gráfica de ecuaciones de la forma $y = mx$, a partir de la gráfica obtenida se toman dos puntos que pertenezcan a la recta y se construye un triángulo rectángulo, para deducir la pendiente (m) a partir de las coordenadas de dos puntos en general, usando como referencia la definición de tangente del ángulo interior del triángulo rectángulo, formado con los dos puntos seleccionados. Una vez que se establece cómo se obtiene la pendiente, se puede proceder a encontrar las ecuaciones de rectas que cumplan con determinadas condiciones y resolver problemas como los siguientes:
 - Una recta de pendiente 3 pasa por el punto (3,2); si la abscisa de otro punto de la recta es 4, hallar su ordenada.
 - Encontrar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $3x+12y-10=0$, que se encuentran a una distancia de 3 unidades.
 - Dados dos vértices de un triángulo ABC, A(-2,-3) y B(2,1) y el punto N(1,-2) de intersección de sus alturas.
 - hallar las ecuaciones de sus alturas
 - hallar las ecuaciones de los lados del triángulo
 - localizar las coordenadas del vértice C
 - encontrar las coordenadas de los pies de las alturas
 - Dado el triángulo cuyos vértices son: A(2,-1), B(4,7) y C(6,-3).
 - Hallar las ecuaciones de las medianas
 - Encuentra las coordenadas del baricentro, punto de intersección de las medianas.
 - Los puntos A(1,-1), B(5,1) y C(1,5) son vértices de un triángulo.
 - Clasifica dicho triángulo según la longitud de sus lados;
 - Calcula su área y perímetro;
 - Calcula las coordenadas del circuncentro, del ortocentro y del baricentro.
 - Prueba que el circuncentro, el ortocentro y el baricentro están sobre una misma recta (recta de Euler).
 - Sean los puntos A(-1, -2), B(6,-6), C(5,2) y D(-2, 6) los vértices de un cuadrilátero.
 - Prueba que sus diagonales son perpendiculares y desiguales.
 - Verifica que sus lados son iguales y paralelos.
 - ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

La circunferencia

3. Se recomienda iniciar con la deducción de la ecuación de la circunferencia en la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, a partir de su definición como lugar geométrico y luego pedir a los alumnos la obtención de ecuaciones de circunferencias: variando las condiciones del radio r y del centro C (h, k), dando tres puntos de la circunferencia, un punto y el centro, los puntos extremos del diámetro, el centro y una recta tangente a la circunferencia, etc.

Presentarles ecuaciones de segundo grado con dos variables para que identifiquen cuál corresponde a una circunferencia y determinen su centro y su radio, por ejemplo:

- $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 25$;
 - $(x + 2)^2 + y^2 = 64$;
 - $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$
 - $x^2 + y^2 + x = 0$
- etc.

4. Completarán este tema con ejercicios como:

- Encontrar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$ en el punto $(4, -3)$.
 - Hallar la ecuación de las siguientes familias de circunferencias:
 - tienen al punto $(-2, 5)$ como centro;
 - pasan por los puntos $(1, 3)$ y $(-2, 5)$.
 - Identifique los siguientes lugares geométricos formados por:
 - los puntos cuya distancia a un punto dado es constante,
 - los puntos tales que su distancia a una recta dada es constante,
 - los puntos que equidistan a dos rectas que se intersectan,etc.
-
- Sea ABC un triángulo dado, determinar el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Unidad 3

Cónicas

Tiempo propuesto: 15 horas.

Presentación

En esta Unidad se estudiarán las cónicas a partir de sus propiedades geométricas, para luego traducirlas a su representación algebraica y resolver algunos problemas donde aparezcan estas curvas, como los planteados en Matemáticas II, que involucran a la parábola. También se presentan actividades que inducen al estudio de la elipse y la hipérbola.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Determinar la ecuación que corresponde a cada cónica, partiendo de sus propiedades geométricas.
- Identificar la cónica y sus propiedades a partir de su ecuación de segundo grado.
- Determinar la ecuación de otras curvas en coordenadas rectangulares.
- Trazar la curva correspondiente a una ecuación dada.

Contenidos temáticos

- Definición de cada una de las cónicas: elipse, hipérbola y parábola
- Análisis de la forma de cada una de ellas,
- Deducción de sus respectivas ecuaciones,
- Localización de focos, vértices y directrices.
- Familias de cónicas.
- Propiedades ópticas de la elipse, hipérbola y parábola.

Actividades de aprendizaje

1. Se sugiere se construya cada una de las cónicas, ya sea doblando papel encerado o con tachuelas, hilos y cartoncillo, se analice geoméricamente cada curva, procurando localizar ejes y centros de simetría. Una vez teniendo la imagen geométrica de cada curva, se puede pasar a analizar y comprender las definiciones de cada cónica para posteriormente deducir su ecuación; para tal fin se introduce un sistema de coordenadas rectangulares sobre la curva obtenida. Para simplificar el procedimiento sugerimos que los focos de la elipse y la hipérbola se coloquen simétricamente en el eje x , con respecto al origen; para la parábola, el origen de coordenadas se coloca en el vértice, el foco y la directriz se colocan simétricos al eje x . Una vez obtenidas las ecuaciones de cada cónica, se comparan los parámetros algebraicos obtenidos con las observaciones.
2. Además, se recomienda realizar ejercicios de hallar las ecuaciones de la elipse, hipérbola o parábola, dadas algunas condiciones, por ejemplo, sus ejes, focos, vértices, etcétera, así como también dadas las ecuaciones, determinar semiejes, focos,

vértices y directrices de estas cónicas y esbozar con estos datos la gráfica de la ecuación.

Complementará este tema la presentación de aplicaciones de las cónicas como por ejemplo aquellas que implican propiedades ópticas. Algunos ejercicios interesantes que se pueden pedir al alumno que resuelva son:

- Calcular el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse $x^2 + 5y^2 = 20$, y los otros dos coinciden con los extremos de su eje menor.
- Calcular el área del triángulo formado por las asíntotas de la hipérbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$ y la recta $9x + 2y - 24 = 0$.
- Hallar los puntos de intersección de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ y la parábola $y^2 = 4x$.

Unidad 4

Sistema de coordenadas polares y trigonometría

Tiempo propuesto: 8 horas.

Presentación

El tema central son las coordenadas polares, como otro sistema de representación del plano, que tiene ventajas para trabajar con ciertos lugares geométricos como las espirales, rosas, etcétera, donde su posición varía de forma periódica. La trigonometría es una herramienta de gran utilidad en esta Unidad.

Objetivos

El alumno será capaz de:

- Usar las coordenadas polares como sistema de referencia para el plano.
- Usar los radianes para medir ángulos.
- Utilizar elementos básicos de trigonometría
- Representar algebraicamente las relaciones geométricas que definen a un lugar geométrico y viceversa.

Contenidos temáticos

- Sistema de coordenadas polares
- Radianes
- Distancia entre dos puntos
- Repaso de trigonometría: círculo unitario o trigonométrico, funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, identidades trigonométricas básicas.
- Estudio de espirales y otras curvas.

Actividades de aprendizaje

1. Para el desarrollo de esta Unidad se recomienda que el alumno construya una “cuadrícula” generada por las coordenadas polares, partiendo de los siguientes conjuntos de puntos (r, q) , donde el radio tome los valores de $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ y el ángulo q aumente de 10° en 10° . Una vez construida esta “cuadrícula”, que el alumno ubique de 5 a 10 puntos en coordenadas polares, procurando que el ángulo sea expresado en grados y radianes. Determinar los simétricos de los puntos indicados anteriormente respecto al origen y al polo.
2. Dados dos puntos $A(r_1, q_1)$ y $B(r_2, q_2)$ pedir al alumno calcule las coordenadas polares del punto medio y su distancia (use ley de senos).
4. Antes de hacer los siguientes ejercicios, se recomienda se haga un repaso de trigonometría, especialmente de las funciones seno, coseno y tangente, y se analice la variación de cada una a través del uso del círculo trigonométrico. También resulta importante que grafiquen estas funciones en coordenadas rectangulares y polares.

3. Que el alumno dibuje, por ejemplo, las siguientes ecuaciones $r = q$ (espiral), $r = \cos q$ (circunferencia), $r = 1 + \cos q$ (cardioide), $r = \sin 2q$ (flor de dos pétalos). Es importante que el alumno intente graficarlos usando coordenadas rectangulares.

Bibliografía

- ANGUIANO A., Antonio. *Matemáticas IV. Geometría analítica* México, McGraw Hill, 1996.
- BOSCH Giral, Carlos, *et al. Matemáticas Técnicas*. México, Limusa-Conalep-SEP, 1998.
Para la Unidad 2: capítulo 5, p. 117. Para la unidad 3, capítulo 6, p. 137 y capítulo 7, p.173. Para la Unidad 4, capítulos 2 y 3, pp. 45 y 73.
- DE OTEYZA, Elena, *et al. Geometría analítica* México, Prentice Hal, 1994.
- FLEMING, Walter, *et al. Álgebra y Trigonometría con Geometría analítica*. USA, Prentice Hall Hispanoamericana, 1984.
- FULLER, Gordon, *et al. Geometría analítica*. USA, Addison -Wesley Iberoamericana, 1988.
Para la Unidad I : capítulo 1, p. 29. Para la Unidad 4: capítulo 7, p. 192.
- GUERRA Tejada, Manuel, *et al. Geometría analítica*. México, McGraw-Hill, 1997. Para la Unidad 1: capítulo 5, p. 63. Para la Unidad 3: capítulo 5, p. 63.
- LEHMAN, Charles. *Geometría analítica*. México, Limusa, 1980.
- LUCIO Gómez, María Guadalupe. *Geometría analítica* México, Limusa, 1984. Para la Unidad 2.
- PURCELLE, Edwin J., *et al. Cálculo con Geometría analítica* México, Prentice Hall, 1992.
- RAMÍREZ de Arellano, Enrique. *Geometría analítica 2 (Lugares Geométricos)* México, Limusa, 1984. Para Unidad 1.
- REYES Guerrero, Araceli. *Geometría analítica 4. Clasificación de cónicas*. México, Limusa, 1984. Para la Unidad 3: capítulo 1, p. 9.
- TORRES, Carlos. *Geometría analítica*. México, Santillana, 1998.